ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Приморская государственная сельскохозяйственная академия»

Институт землеустройства и агротехнологий

Савельева Е.В.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для студентов направлений подготовки: (35.03.04) «Агрономия», (35.03.03) «Агрохимия и агропочвоведение», (35.03.07) «Технология производства и переработка с/х продукции», (36.03.01) «Ветеринарно-санитарная экспертиза»

Уссурийск, 2016

УДК 517
Составитель: Савельева Е.В., канд. техн. наук, доцент кафедры физики и высшей математики

Рецензент: Л.Д. Ердакова, к. пед. н., доцент ДВГУПС Приморского железнодорожного транспорта (филиал ДВГУПС в г. Уссурийске).

Савельева Е.В. Математика: учебное пособие для студентов направлений подготовки: (35.03.04) «Агрономия», (35.03.03) «Агрохимия и агропочвоведение», (35.03.07) «Технология производства и переработка с/х продукции» [Электронный ресурс]: / Е.В. Савельева; ФГБОУ ВО ПГСХА- Электрон. текст. дан. – Уссурийск: ПГСХА, 2016. – 116 с. - Режим доступа: www.elib.primacad.ru.

Пособие содержит методические материалы для освоения дисциплины, задания для практических занятий и самостоятельной работы студентов, имеющих прикладной характер для биологических направлений.

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО «Приморская государственная сельскохозяйственная академия».

Введение

Цели преподавания математики в высших сельскохозяйственных учебных заведениях: ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач сельскохозяйственного производства; развить логическое мышление и навыки математического исследования явлений и процессов, связанных с этим производством.

Такую целенаправленность имеют настоящие методические указания, которые включают следующие разделы высшей математики:

1. введение в математический анализ;
2. дифференциальное исчисление функции одной переменной;
3. интегральное исчисление функции одной переменной;
4. дифференциальное исчисление функции двух переменных;
5. дифференциальные уравнения.

Знания этих разделов используются в различных областях сельскохозяйственного производства: в математическом моделировании агрономических и зоотехнических процессов; в исследовании многофакторных производственных функций в растениеводстве, животноводстве, технологии переработки продуктов сельского хозяйства. Все указанные разделы содержат:

1. теоретический минимум (основные определения, формулы, таблицы) и типовые задачи с решениями, позволяющие подготовиться студентам к выполнению индивидуальных заданий;
2. задания для самостоятельного решения (25 вариантов по 4-5 задач): четыре контрольные работы, два типовых расчета, одно индивидуальное задание. При подборе заданий использован дифференцированный подход к уровню сложности задач, так задания, помеченные звездочкой, предназначены для студентов, достигших требуемого уровня усвоения материала;
3. итоговый тест для контроля знаний по всему разделу содержит традиционные тестовые задания для проверки уровня усвоения знаний по данному разделу.

Методические указания предназначены для нескольких направлений, поэтому для студентов направлений: «Зоотехния», «Агрохимия и агропочвоведение», «Ветеринарно санитарная экспертиза» автор рекомендуют не выполнять следующие задания: №2 из типового расчета «Дифференциальное исчисление»; №1(б) из типового расчета «Определенный интеграл»;№1 из контрольной работы «Функция двух переменных»; №3(б) из контрольной работы «Дифференциальные уравнения».

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

1.1. Необходимый теоретический минимум и примеры решения типовых задач.

<u>Понятие функции. Вычисление пределов функций.</u>

Определение 1.1. Если каждому значению, которое может принять переменная ***x,*** по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение переменной ***y,*** то говорят, что ***y*** есть ***функция*** от ***x*** и обозначают ***y =f(x).***

Совокупность всех значений аргумента ***x,*** для которых функция ***y=f(x)*** определена, называется ***областью определения*** этой функции.

Пример 1. Найти область определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{25 - x^2}$

Решение.

Функция принимает действительные значения в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком корня, будет иметь неотрицательные значения.

Функция имеет смысл, если $25 - x^2 \geq 0$. Отсюда $x^2 \leq 25$ или $|x| \leq 5$.

Следовательно, область определения данной функции есть отрезок $[-5;5]$.

б) $y = \lg \dfrac{x^2 - 8x}{4}$

Решение.

Логарифмическая функция определена только для положительных значений своего аргумента.

Эта функция имеет смысл, если $\dfrac{x^2 - 8x}{4} > 0$. Отсюда $x^2 - 8x > 0$ или $x(x-8) > 0$. Решая это неравенство, получаем $x \in (-\infty;0) \cup (8;+\infty)$.

Определение 1.2. Функции, в которых задается соответствие между величинами, характеризующими ход конкретного процесса или явления в сельском хозяйстве, называются производственными.

Производственная функция тем точнее характеризует исследуемый процесс, чем выше уровень развития математического аппарата и чем полнее знания об изучаемом процессе или объекте.

Производственные функции получают в результате изучения обработки числовых данных результатов хозяйственной деятельности. Важно, что при построении производственной функции главное внимание обращается на то, чтобы функция, заданная в виде формулы, отражала наиболее важные, существенные закономерности исследуемого процесса. Таким образом, производственная функция отражает процесс приближенно, является его математической моделью.

Примеры производственных функций:

1. В рационе кормления свиней содержится несколько видов кормов. Если их отношение считать постоянным, т.е. если с увеличением нормы одного вида кормов увеличивается и норма другого, то нет необходимости производить подсчет всех видов кормов. В этом случае изучение процесса можно свести к анализу производственной функций одной переменной.

Пусть y – привес одной головы (кг) в начале откорма, x – потребление кукурузы (кг) в начале откорма. Тогда с 10% - ным содержанием белка квадратичная функция имеет следующий вид:

$$y = -0{,}480 + 0{,}335x - 0{,}0001x^2$$

2. Живая масса телят до одного года y, (кг) выражается функцией:

$$y = 378{,}4 - 419{,}6e^{-0{,}0001x}$$ где

x – потребление полностью усвояемого питательного вещества, кг.

Определение 1.3. Число A называется *пределом* функции *f(x)* при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$

Это записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Практическое вычисление пределов основано на следующих теориях.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют, то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(предел алгебраической суммы равен сумме пределов).

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(предел произведения равен произведению пределов).

3. $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где c = const

(постоянную величину можно выносить за знак предела).

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$)

(предел отношения равен отношению пределов).

Используются также следующие пределы:

Первый замечательный предел:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \qquad (1.1)$$

Второй замечательный предел:

$$\boxed{\lim_{\alpha\to\infty}(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha} = \lim_{a\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{a}} = e} \qquad (1.2)$$

Часто встречаются пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} c\cdot x = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c} = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{c}{x} = -\infty$
4. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{c}{x} = \infty$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x} = 0$

Пример 2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+6}{x^2-1} = \dfrac{2+6}{2^2-1} = \dfrac{8}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{x^2} = \dfrac{9-9}{9^2} = \dfrac{0}{81} = 0$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cdot 0-1}{1-\cos 0}=\dfrac{-1}{1-1}=-\infty$

Более сложные случаи, так называемые неопределенности $\left(\dfrac{0}{0};\dfrac{\infty}{\infty};1^{\infty}\right)$, рассмотрим на примерах.

Пример 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\dfrac{2\cdot 9-5\cdot 3-3}{3\cdot 9-4\cdot 3-15}=\dfrac{0}{0}$

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента *x=3* приводит к неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.чтобы раскрыть неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.числитель и знаменатель дроби разложим на множители как квадратные трехчлены по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлены. Затем сокращаем дробь на *(x-3).*

$2x^2-5x-3=0$

$D=b^2 4ac=25+24=49$

$x_{12}=-\dfrac{b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_{12}=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{5\pm 7}{4};x_1=3,x_2=-\dfrac{1}{2}$

$3x^2-4x-15=0$

$D=16-4\cdot(-45)=16+180=196$

$x_{12}=\dfrac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\dfrac{4\pm 14}{6};x_1=3,x_2=-\dfrac{5}{3}$

Итак, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x-4x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{3(x-3)(x+\frac{5}{3})}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{3x+5}=\dfrac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+5}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}=\frac{\sqrt{4-1}-\sqrt{7-4}}{4-4}=\frac{0}{0}$$

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})$. Такое преобразование даст возможность сократить дробь на множитель *(x-4)*.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1-(7-x)}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Пример 4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{x^3-7x}$**;** б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+1}{x^2-3x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x+2}{6x^2+4x-1}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{x^3-7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{7x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{7}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

Здесь при $x\to\infty$ и числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, т.е. получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Старшая степень числителя x^2, а знаменателя - x^3. Числитель и знаменатель дроби поделим на x^3. Величины $\frac{2}{x},\frac{5}{x^2},\frac{3}{x^3},\frac{7}{x^2}$ являются бесконечно малыми величинами при $x\to\infty$ и их пределы равны нулю.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+1}{x^2-3x-7}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+1}{x^2-3x-7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{7}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}}=\frac{4}{0}=\infty$$

При $x\to\infty$ получаем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим и числитель и знаменатель на x^4 (старшая степень числителя). Величины $\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^4},\frac{3}{x^3};\frac{7}{x^4}$ бесконечно малые при $x\to\infty$ и их пределы равны нулю.

Итак, наша дробь как величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой величиной и её предел равен бесконечности.

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x+2}{6x^2+4x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{6+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Применяем тот же прием, делим и числитель и знаменатель на x^2. Обобщая последние три приема можно записать правило вычисления предела отношения двух многочленов при «раскрытии» неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, если\cdot m=n\\ 0, если\cdot m<n\\ \infty, если\cdot m>n\end{cases}$$

Пример 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg 9x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

Решение.

а) Сведем к первому замечательному пределу (1.1).

Заменим $tg 9x=\frac{\sin 9x}{\cos x}$, умножим числитель и знаменатель на *4x* и *9x* используем свойства пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg 9x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{9x}{\sin 9x}\cdot\frac{\cos 9x}{1}\cdot\frac{4x}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{9x}{\sin 9x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 9x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4}{9}=1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\text{замена}\\ 1-\cos 2x=2\sin^2 x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2}\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пример 5. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{5-n}\right)^{3n}$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5-n}\right)^{3n}=\left[1^{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}\text{сведем}\cdot\text{ко}\cdot\text{второму}\\ \text{замечательному}\cdot\text{пределу}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e\\ \text{замена}:\dfrac{2}{5-n}=\dfrac{1}{x}\\ 2x=5-n,\text{отсюда}\cdot n=5-2x\\ x\to\infty\cdot\text{при}\cdot n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3(5-2x)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{15-6x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{15}\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-6}=1\cdot e^{-6}=e^{-6}$$

Величина $\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ бесконечно малая.

Непрерывность и точки разрыва функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 *и* x – два произвольных значения аргумента из этого интервала. Обозначим $x-x_0=\Delta x$, откуда $x=x_0+\Delta x$.

Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x, первоначальному значению придано приращение Δx.

Определение 1.3. Приращением Δy функции $y=f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение 1.4. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Этому определению равносильно следующее:

Определение 1.5. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке, если при $x \to x_0$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для непрерывности функции f(x) в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т.е. в самой точке и вблизи этой точки);
2. функция должна иметь одинаковые односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;
3. эти односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$;

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ ***разрывна***, а точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

Точки разрыва функции делятся на два типа.

Точки разрыва I рода

Если функция $y = f(x)$ имеет конечные односторонние пределы в точке x_0 и эти пределы равны, но значение функции е точке x_0 не существует, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$, то говорят, что функция в точке x_0 имеет ***устранимый разрыв.***

Если односторонние пределы функции $y=f(x)$ в точке x_0 существуют, но они не равны, то функция в точке x_0 имеет ***неустранимый разрыв***.

Функция в этой точке делает «скачок». «Скачок» функции в точке разрыва равен разности односторонних пределов $\delta = \left| \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \right|$

Точки разрыва II рода

Функции $y = f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв II рода, если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен бесконечности либо не существует.

Пример 6.

Исследовать функции на непрерывность, определить тип точки разрыва, сделать чертеж**,**

а) $y = \dfrac{3x}{x+2}$; б) $y = \begin{cases} (x-4)^2 & при \quad x \le 4 \\ 7 - x & при \quad x > 4 \end{cases}$

Решение.

а) Функция определена при всех значениях *x,* кроме *x*=-*2*. Исследуем характер разрыва в этой точке, найдем односторонние пределы.

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{3x}{x+2} = \frac{3(-2-0)}{-2-0+2} = \frac{-6}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{3(-2+0)}{-2+0+2} = \frac{-6}{+0} = -\infty$$

X	y
-6	4,5
-5	5
-4	6
-3	9
-1	-3
0	0
1	1
4	2

Таким образом, при *x*=-*2* данная функция имеет разрыв второго рода, т.к односторонние пределы в этой точке не существуют. Графиком данной функции служит Равносторонняя гипербола, асимптоты которой параллельны осям координат Найдем дополнительные точки, составим таблицу и построим график (рисунок1).

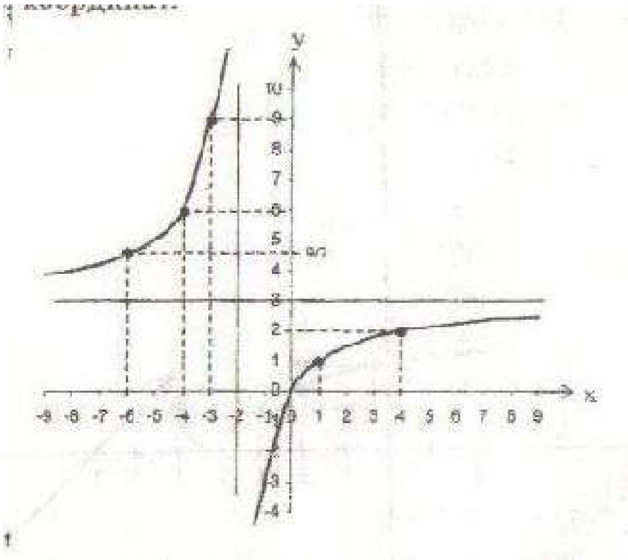


Рисунок 1.

б) $y = \begin{cases} (x-4)^2 & при \quad x \le 4 \\ 7 - x & при \quad x > 4 \end{cases}$

Решение.

Данная функция определена и непрерывна в интервалах $(-\infty;4] \cup (4;+\infty)$. При *x*=4 меняется аналитическое выражение функции.

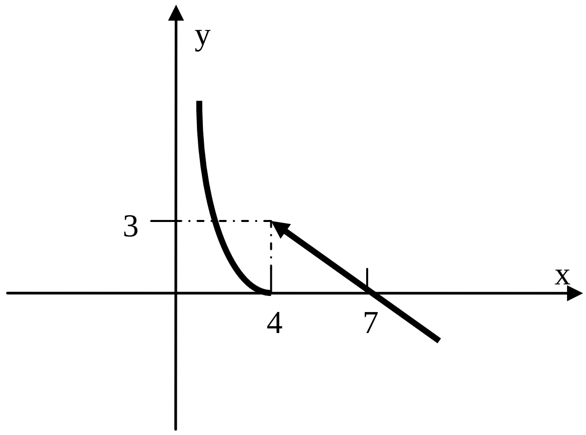


Рисунок 2.

И только в этой точке функция может иметь разрыв.

Определим односторонние пределы в точке *x*=4:

$$\lim_{x\to 4-0} y = \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} (x-4)^2 = 0; \qquad \lim_{x\to 4+0} y = \lim_{\substack{x\to 4+0\\ x>4}} (7-x) = 3$$

Т.к. односторонние пределы не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

Скачком функции в точке разрыва называется абсолютная величина разности между ее правым и левым предельными значениями. Следовательно, в точке x=4 скачок функции $\Delta = |3-0| = 3$. График функции (рисунок 2).

Вопросы для самопроверки.

1. Сформулируйте определение функции? Что такое область определения функции?
2. Какие существуют способы заданий функции?
3. Что такое бесконечно малая и бесконечно большая величины? Какая существует связь между ними?
4. Сформулируйте определение предела функции.
5. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций,
6. Виды неопределенностей и правила их раскрытия.
7. Первый замечательный предел.
8. Второй замечательный предел.
9. Приращения аргумента и функции.
10. Дайте определения непрерывности функции.
11. Условия непрерывности функции в точке.
12. Что такое точка разрыва? Классификация точек разрыва.
13. Основные свойства непрерывных функций.

1.2. Задания для самостоятельного решения.

Контрольная работа №1 «Пределы функции»

Найти пределы следующих функций.

В-1

а) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ *при* $x_0 = 1; x_0 = 5; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{4x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{3n}\right)^n$

В-2

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$ *при* $x_0=2; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 4x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{2x}$

В-3

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ *при* $x_0=0; x_0=3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin\frac{x}{4}}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}(1+3\alpha)^{\frac{5}{4a}}$

В-4

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$ *при* $x_0=1; x_0=-2; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 7x}{3x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{7n}\right)^{3n}$

В-5

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ *при* $x_0=1; x_0=3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{4x}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}(1+4\alpha)^{\frac{5}{3a}}$

В-6

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x}{x^2+x-20}$ *при* $x_0=2; x_0=4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{8n}\right)^{4n}$

В-7

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ *при* $x_0=2; x_0=4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+4}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 8x}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}(1+2\alpha)^{\frac{1}{3a}}$

В-8

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+4}$ *при* $x_0=3; x_0=2; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 5x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{5n}\right)^{n}$

В-9

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$ *при* $x_0=1; x_0=-2; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{2x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 16x}{2x}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}(1+7\alpha)^{\frac{1}{7a}}$

В-10

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+5x+6}$ *при* $x_0=2; x_0=-3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{2-\sqrt{4-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin 10x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{12n}\right)^{n}$

В-11

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-2x+x^2}{1-x}$ *при* $x_0=2; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{3-\sqrt{8+x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{6x}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}\left(1+\dfrac{3\alpha}{5}\right)^{\frac{2}{a}}$

В-12

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x}{x^2-6x+9}$ *при* $x_0=0; x_0=3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 8x}$ г) $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{3}\right)^{\frac{4}{a}}$

В-13

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$ *при* $x_0=0; x_0=-2; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{5x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5n}\right)^{4n}$

В-14

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ *при* $x_0=1; x_0=-3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 3x}{7x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{8n}\right)^{2n}$

В-15

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-16}{2x^2+6x-8}$ *при* $x_0=1; x_0=-4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{7-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{7x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^{\frac{2x}{5}}$

В-16

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$ *при* $x_0=0; x_0=3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ 8x}{x/3}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{3n}\right)^{\frac{2n}{5}}$

В-17

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$ *при* $x_0=-1; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 8x}{\sin 3x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{2n}\right)^{\frac{7n}{3}}$

В-18

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$ *при* $x_0=0; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{\frac{7n}{5}}$

В-19

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$ *при* $x_0=-1; x_0=-5; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 7x}{tg 4x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{7x}\right)^{\frac{3x}{2}}$

В-20

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$ *при* $x_0=1; x_0=-3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3\sin 7x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n-7}\right)^{\frac{n}{2}}$

В-21*

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$ *при* $x_0=0; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{1-x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{x^2}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{3n}$

В-22*

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x-10}{25-x^2}$ *при* $x_0=1; x_0=5; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 9x}{4x^2}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{n-5}\right)^{3n}$

<u>В-23*</u>

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-4x}$ *при* $x_0=-1; x_0=4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tg\,\frac{x}{3}}{\sin 5x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{n-4}\right)^{\frac{n}{4}}$

<u>В-24*</u>

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2+x-6}$ *при* $x_0=0; x_0=2; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 8x}{9x^2}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n+9}\right)^{\frac{n}{5}}$

<u>В-25*</u>

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ *при* $x_0=-2; x_0=-1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{1-\cos 2x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)^{2n-1}$

Задачи повышенной трудности.

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{2n+3}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x}-2}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot tgx}{\sin^2 x}$ е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}$

<u>Индивидуальное задание №1 «Непрерывность функции. Точки разрыва».</u>

Исследовать функции на непрерывность. Сделать чертеж.

1. $y=\dfrac{2x}{x+3}$ 2. $y=\dfrac{2x}{x-1}$ 3. $y=\dfrac{x}{x-3}$ 4. $y=\dfrac{2x}{x+1}$

5. $y=\frac{x}{x+4}$ 6. $y=\frac{2x}{x+2}$ 7. $y=\frac{2x}{3-x}$ 8. $y=\frac{2x}{1-x}$

9. $y=\frac{2x}{2-x}$ 10. $y=\frac{x}{x+5}$ 11. $y=\frac{x}{6-x}$ 12. $y=\frac{x}{4-x}$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2-4\cdot при\cdot x<1 \\ 4-2x\cdot при\cdot x\geq 1 \end{cases}$ 14. $f(x)=\begin{cases} x^2+1\cdot при\cdot x\leq 2 \\ 4-x\cdot при\cdot x>2 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} x+8\cdot при\cdot x<-2 \\ x^2-3\cdot при\cdot x\geq -2 \end{cases}$ 16. $f(x)=\begin{cases} x+5\cdot при\cdot x\leq -1 \\ 2-x^2\cdot при\cdot x>-1 \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 4-x^2\cdot при\cdot x<3 \\ x-2\cdot при\cdot x\geq 3 \end{cases}$ 18. $f(x)=\begin{cases} 5-x\cdot при\cdot x\leq -1 \\ x^2+3\cdot при\cdot x>-1 \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} x^2-4\cdot при\cdot x<2 \\ 3-x\cdot при\cdot x\geq 2 \end{cases}$ 20. $f(x)=\begin{cases} x+6\cdot при\cdot x\leq -2 \\ x^2-1\cdot при\cdot x>-2 \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 6-x^2\cdot при\cdot x\leq 2 \\ x-3\cdot при\cdot x>2 \end{cases}$ 22. $f(x)=\begin{cases} x+4\cdot при\cdot x<-3 \\ 5-x^2\cdot при\cdot x\geq -3 \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} x+3\cdot при\cdot x\leq -1 \\ x^2-2\cdot при\cdot x>-1 \end{cases}$ 24. $f(x)=\begin{cases} x^2-4\cdot при\cdot x\leq 2 \\ 6-2x\ \ \cdot при\cdot x>2 \end{cases}$

25*. $f(x)=\begin{cases} 1-x\cdot при\cdot x\leq 1 \\ (1-x^2)\cdot при\cdot 1<x\leq 3 \\ x\cdot при\cdot x\geq 3 \end{cases}$

Задания повышенной трудности.

Исследовать функции на непрерывность. Сделать чертеж.

а) $f(x)=\begin{cases} x+2\cdot при\cdot x\leq -1 \\ x^2+1\cdot при\cdot -1<x\leq 1 \\ -x+3\cdot при\cdot x>1 \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} -2x\cdot при\cdot x\leq 0 \\ x^2+1\cdot при\cdot 0<x\leq 1 \\ 2\cdot при\cdot x>1 \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2\cdot при\cdot x<-2 \\ 3-x\cdot при\cdot -2\leq x\leq 1 \\ \frac{1}{2}x\cdot при\cdot x>1 \end{cases}$; г) $f(x)=\begin{cases} -x\cdot при\cdot x\leq 0 \\ x^2\cdot при\cdot 0<x\leq 2 \\ x+1\cdot при\cdot x>2 \end{cases}$

Прикладные задачи сельскохозяйственного производства.

1) Содержание каротина k (в промилле, т.е. в г на 1 кг сухого вещества) в скошенной массе люцерны через t ч выражается зависимостью $k = pe^{ct}$

По данным опыта получена следующая таблица:

t	0	18
k,%	0,24	0,08

Найдите параметры p и c, составьте таблицу и постройте график найденной зависимости, взяв t от 0 до 24.

2) Функция $x(t) = 1000 + 500(1 - 2^{-t})$ соответствует непрерывному росту популяции бактерий от начального размера x(0)=1000 до предельного x(t) = 1500. Чему равны численные значения популяции в момент времени t = 1,2.3 …., 10. Постройте график.

3)Численность популяций x(t) выражается функциями от t:

а) $x(t) = 100 + \dfrac{100}{1+t^2}$ б) $x(t) = 100 + 100e^{-t}$

в) $x(t) = 90 + 10t^2$ г) $x(t) = 10e^{t/10}$

В каждом случае найдите предельные размеры популяций и начальную популяцию *x(0).*

4)Популяция бактерий увеличивается от начального размера до размера p(t) в момент t (дни) согласно уравнению:

$$p(t) = \frac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)}$$

Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ - равновесную популяцию.

5)При влиянии глюкозы ее содержание в крови больного спустя t ч составляет $c(t) = 10 - 8e^{-t}$ Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$ - равновесное состояние содержания глюкозы в крови.

1.3. Итоговый тест.

1.Область определения функции $y = \sqrt{1-3x}$ ***:***

1. $x \geq 1/3$**;** **2.** $x \leq -1/3$**;** **3.** x>1/3; **4.** x>-1/3

***2. Среди функций выберите нечётные 1)y=sin4x; 2)y=log$_2$4x;*** 3)y=4x^3; 4)y=tg4x^2; 5)y=4^x:

1. 1,2,3; **2.** 1,3,5; **3.** 1,3; **4.** 1,3,4.

3. Найти точки пересечения с осями графика функции $y = 4 - x^2$ **:**

1. OX: (-2;0), (2;0); OY: (0;4); **2.** OX: (4;0); OY: (0;0);
3. OX: (2;0); OY: (0;4); **4.** OX: (-2;0); OY: (0;-4).

4. Предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ ***равен:***

1. 0; **2.** 1/3 ; **3.** ∞ ; **4.** 3.

5. Отношение двух бесконечно малых величин есть величина:

1. бесконечно – малая; **2.** постоянная;
3. бесконечно – большая; **4.** неопределенная.

6. Поставьте соответствие между пределами и значениями:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 8x}{2x}$	1. 1/4
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8+2x-x^2}{4x^2-x}$	2. -4
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x^2+4}$	3. -1/4
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{x-2}$	4. 4

7. При $x \to \infty$ ***функция*** $y = \dfrac{2x}{x^3-x+1}$ ***является:***

1. бесконечно – большой величиной; **2.** постоянной величиной 2;
3. бесконечно – малой величиной; **3.** постоянной величиной 1.

8. Сколько точек разрыва имеет функция $y = \dfrac{x-1}{x^3+3x^2-4x}$

1. 1; **2.** 2; **3.** не имеет; **4.** 3.

9. Последовательность $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$ ***при*** $n\to\infty$ ***стремится:***

1. к числу $e^{\frac{2}{3}}$; **2.** к числу e; **3.** ∞; **4.** к числу $e^{\frac{3}{2}}$.

10. Функция называется непрерывной в точке x=x₀ если выполняется:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)}{x_0}=0$; **2.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$; **3.** $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y=0$; **4.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$

11. Дан график функций (рисунок 3), определите соответствующую функцию:

1. $\begin{cases} -x^2, если & x<1 \\ x-2, если & x\ge 1\end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2, если & x<1 \\ 2-x, если & x\ge 1\end{cases}$

3. $\begin{cases} -x^2, если & x<1 \\ 2-x, если & x\ge 1\end{cases}$

4. $\begin{cases} -x^2, если & x<1 \\ x+2, если & x\ge 1\end{cases}$

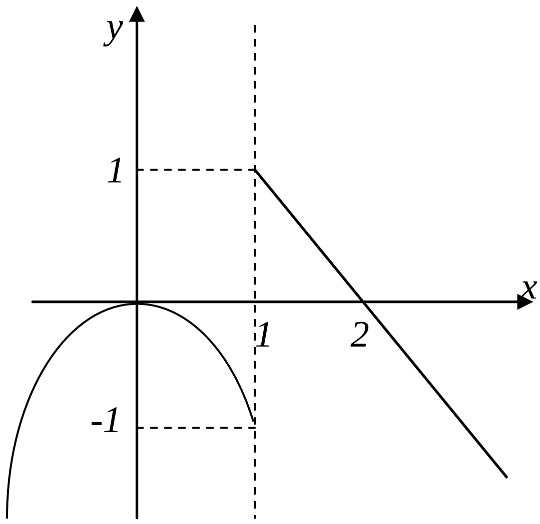


Рисунок 3.

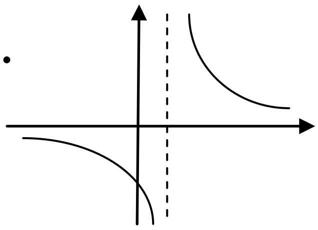
12. Точка разрыва x=-3 является точкой разрыва второго рода для функции:

1. $\begin{cases} x^2, если & x<-3 \\ x, если & x\ge -3\end{cases}$; **2.** $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$;

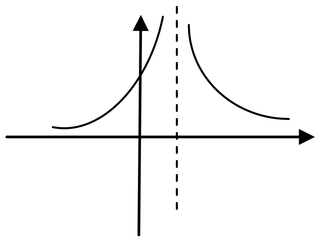
3. $\begin{cases} x^2 - 2, если & x < -3 \\ 4 + x, если & x \geq -3 \end{cases}$; **4.** $y = \dfrac{2x}{x+3}$.

13. Функция в точке x=1 имеет односторонние пределы
$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = +\infty$, указать график такой график:

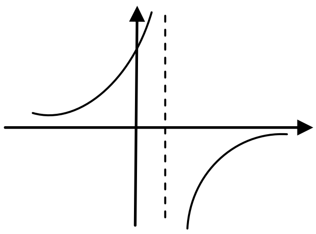
1.



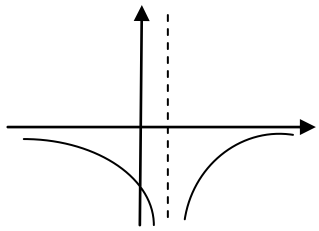
2.



3.



4.



14. При $x \to 0$ ***функция*** $y = \dfrac{2}{x^3 - x + 1}$ ***является:***

1. бесконечно – большой величиной; **2.** постоянной величиной 2;
3. бесконечно – малой величиной; **3.** постоянной величиной 1.

15. В точке имеем разрыв первого рода, если в этой точке:

1. односторонние пределы не существуют;
2. односторонние пределы существуют и равны;
3. один из односторонних пределов не существует;
4. односторонние пределы существуют, но не равны.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

2.1. Необходимый теоретический минимум и примеры решения типовых задач.

Определение производной функций. Основные правила и формулы дифференцирования.

Определение 2.1. Производной функции *y = f(x)* в точке *x* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} \qquad (2.1)$$

Производная обозначается y' или, *f'(x)* ,или $\dfrac{dy}{dx}$.

В механике производная от пройденного пути *S* по времени *t* есть скорость *v*.

$$\boxed{v=S'(t_0)} \qquad (2.2)$$

В геометрии производная функции *y = f(x)* есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции:

$$\boxed{k=f'(x_0)} \qquad (2.3)$$

Уравнение касательной к графику функции *y = f(x)* в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

В биологии производная это есть производительность жизнедеятельности микроорганизмов в момент времени *t*.

$$\boxed{y'=p'(t)} \qquad (2.4)$$

Пример 1. Пусть популяция в момент *t* насчитывает *p(t)* особей. Найти скорость роста популяции: а) в произвольный момент *t*;

б) в момент *t=1c.*

Решение.

Из биологического смысла производной имеем: *y'=p'(t)=200t* – скорость роста популяции в произвольный момент *t*; *y'=p'(1)*=200.

Действие нахождения производной называется ***дифференцированием*** функции.

Общее правило дифференцирования (четыре шага нахождения производной)

1. придать аргументу функции приращение Δx;
2. найти изменение функции Δy (приращение функции) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;
3. найти отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
4. найти предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Основные правила дифференцирования.

Если функции *u = u(x)* и *V = V(X)* дифференцируемы в точке *x,* тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1. *(cu)'= cu',* где с - постоянная;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - привило сложения;
3. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ - правило произведения;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ - привило частного;
5. Производная сложной функции: $f'(\varphi(x)) = f'(u) \cdot u'$, где *u=u(x)* - *промежуточный аргумент.*

Таблица производных основных функций

Таблица 1.

а) простые функции $y = f(x)$	б) сложные функции $y = f(u), u = \varphi(x)$
1. $(x)' = 1$	
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	2а. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3а. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	4а. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	5а. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6. $(e^x)' = e^x$	6а. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	7а. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	8а. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
9. $(\sin x)' = \cos x$	9а. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos x)' = -\sin x$	10а. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	11а. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	12а. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13а. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14а. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	15а. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	16а. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример 2.

Найти производную функции $f(x)=2x-\frac{1}{x^3}+3\sqrt[3]{x^2}$ и вычислить её значение при $x=1$.

Решение.

Преобразуем данную функцию, используя свойства степени: $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ и $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

$$f(x)=2x-x^3+3x^{\frac{2}{3}}$$

Последовательно применим правило дифференцирования алгебраической суммы (2) и формулы (1),(2).

$$f'(x)=(2x)'-\left(x^{-3}\right)'+\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)'=2(x)'-\left(x^{-3}\right)+3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)=2\cdot1-(-3)\cdot x^{-3-1}+3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=$$

$$=2+3\cdot x^{-4}+2\cdot x^{-\frac{1}{3}}=2+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}=2+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Для нахождения значения производной в точке подставим в выражение производной значение $x=1$.

Получим: $f'(1)=2+\frac{3}{1^4}+\frac{2}{\sqrt[3]{1}}=7$

Пример 3. Найти производные следующих функций:

а) $y=x^2\cdot\ln x$; б) $y=\frac{t^3-10}{t^2}$

Решение.

а) Применим правило дифференцирования произведения двух функций (3) и формулы (2) и (8)

$$y'=\left(x^2\right)'\cdot\ln x+x^2\cdot(\ln x)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x\cdot(2+\ln x+1)$$

б) Применим правило дифференцирования частного (4), формулу (2):

$$y'=\frac{\left(t^3-10\right)'\cdot t^2-\left(t^3-10\right)\cdot\left(t^2\right)'}{\left(t^2\right)^2}=\frac{3t^2\cdot t^2-\left(t^3-10\right)\cdot 2t}{t^4}=\frac{3t^4-2t^4+20t}{t^4}=\frac{t^4+20t}{t^4}=$$

$$=\frac{t\left(t^3+20\right)}{t^4}=\frac{t^3+20}{t^3}$$

Пример 4. Найти производные следующих функций:

а) $y=(x^2-5x)^3$; б) $y=e^{\sin x+1}$; в) $y=x^3\cdot\ln\frac{x}{2}$; г) $S=2^{\arcsin t}$.

Решение.

Функции (а), (б), (в) представляют собой сложные функции.

а) Положим $u=x^2-5x,$ тогда $y=u^3$

Последовательно применим правило дифференцирования сложной функции (5) и формулу (2а), затем правило (2) и формулу (2).

$$y'(x)=\left(u^3\right)'=3u^2\cdot u'(x)$$

$$y'(x)=3\left(x^2-5x\right)^2\cdot\left(x^2-5x\right)'=3\left(x^2-5x\right)^2\cdot(2x-5)$$

б) Положим $u=\sin x+1,$ тогда $y=e^u$. Применим формулу (6а), правило (2) и формулу (9)

$$y'(x)=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'(x)$$

$$y'(x)=e^{\sin x+1}\cdot(\sin x+1)'=e^{\sin x+1}\cdot(\cos x+0)=\cos x\cdot e^{\sin x+1}.$$

в) Второй сомножитель есть сложная логарифмическая функция $\ln u$, где $u=\frac{x}{2}$. Найдем производную этого сомножителя по формуле (8а).

$$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'(x) \text{ т.е. } \left(\ln\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$$

По правилу (3) и формуле (2), имеем

$$y'(x)=\left(x^3\right)'\cdot\ln\frac{x}{2}+x^3\cdot\left(\ln\frac{x}{2}\right)'=3x^2\cdot\ln\frac{x}{2}+x^3\cdot\frac{1}{x}=x^2\cdot\left(3\ln\frac{x}{2}+1\right)$$

г) Пусть $y=2^u,$ *где* $u=\arcsin t$

$$S'=2^u\cdot\ln 2\cdot u'=2^{\arcsin t}\cdot\ln 2\cdot(\arcsin t)'=\frac{2^{\arcsin t}\cdot\ln 2}{\sqrt{1-t^2}}$$

<u>Производные высших порядков. Понятие дифференциала.</u>

Производная функции называется производной первого порядка. Если функция дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается ( ).

Производной 3-го порядка называется производная от производной 2-го порядка.

Определение 2.2. Производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков.***

Определение 2.3. Произведение производной $f'(x)$ на приращение Δx называется ***дифференциалом*** функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Обозначают дифференциал *dy* или *df(x)*. Поэтому можно написать

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot\Delta x} \tag{2.5}$$

Для приращения независимой переменной имеем $\Delta x=dx$, и поэтому дифференциал также записывается в виде: $dy = y'dx$.

Формула для вычислений приближенных значений функции:

(2.6)

Пример 5.

С помощью дифференциала приближенно вычислить

Решение.

Рассмотрим функцию ,

1) Используем формулу для вычисления приближенных значений функции:
2) Положим , тогда

   Значит, =**1**

3) Подставляя найденные значения в формулу, получим:

   1,1

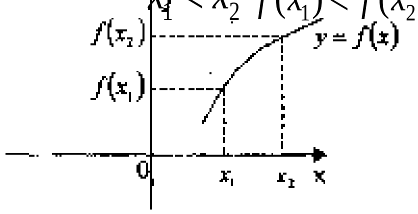
<u>Применение дифференциального исчисления к исследованию функции.</u>

Одно из самых важных назначений дифференциального исчисления - это применение его к исследованию функций, т.е. к характеристике поведения функции при изменении аргумента.

Возрастание и убывание функции на интервале

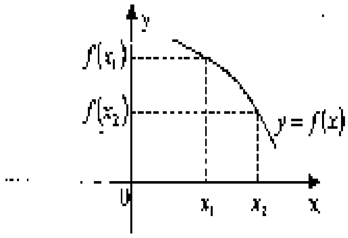
Определение. Функция *y = f(x)* называется **возрастающей** на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции,

$x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2).$



Определение. Функция *y = f(x)* называется **убывающей** на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для

$x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$



Определение 2.4. Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется **монотонной** на этом промежутке.

необходимое и достаточное условия возрастания функции

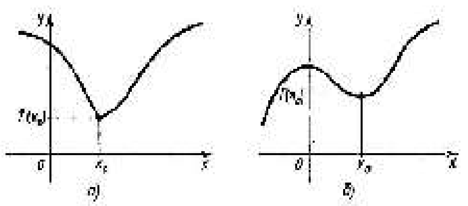
Для того, чтобы непрерывная функция возрастала на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее первая производная была положительной во всех точках этого интервала.

необходимое и достаточное условия убывания функции

Для того, чтобы непрерывная функция убывала на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее первая производная была отрицательной во всех точках этого интервала.

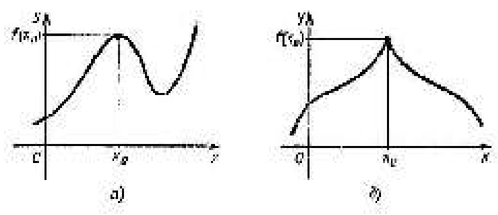
Определение. В точке $\mathbf{x_0}$ функции y=f(x) имеет **минимум** (**min**), если значение функции в этой точке меньше, чем значение функции в близлежащих точках, т.е.

$$f(x_0) < f(x_0 + x).$$



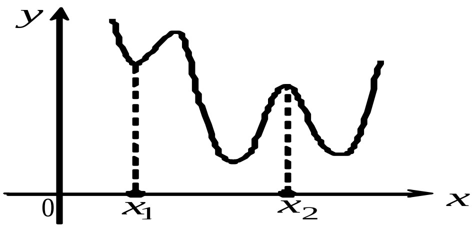
Определение. В точке x_0 функции y=f(x) имеет **максимум (max)**, если значение функции в этой точке больше, чем значение функции в близлежащих точках т.е.

$$f(x_0) > f(x_0 + x).$$



Определение 2.5 Точки max и min называются точками ***экстремума***.

Функция может иметь в своей области определения несколько точек максимума и минимума. Некоторые минимумы функции могут быть больше ее максимумов.



В точке функция имеет минимум, а в точке функция имеет максимум.

Необходимое условие существования экстремума

Если x_0 – точка экстремума функции , и эта функция дифференцируема в данной точке, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

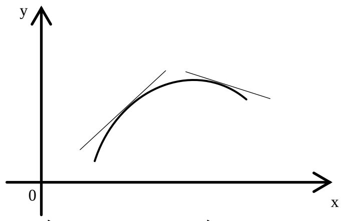
Первое достаточное условие существования экстремума функции

Если непрерывная функция в точке $\boldsymbol{x_0}$ имеет первую производную, равную 0, и при переходе через x_0 производная меняет знак с “+” на “ – “ , то в точке x_0 функция имеет **max**, если с “ - ” на “+”, то **min.**

Определение 2.6. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** функции .

Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале

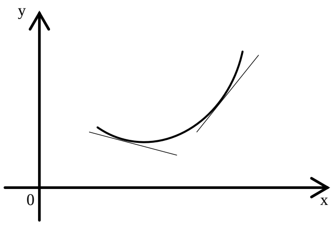
Определение. График функции называется выпуклым на интервале, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.



необходимое и достаточное условия выпуклости графика функции

Для того, чтобы график непрерывной функции был выпуклым на интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная была отрицательной во всех точках этого интервала, т.е..

Определение. График функции называется вогнутым на интервале, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.



необходимое и достаточное условия вогнутости графика функции

Для того, чтобы график непрерывной функции был вогнутым на интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная была положительной во всех точках этого интервала, т.е..

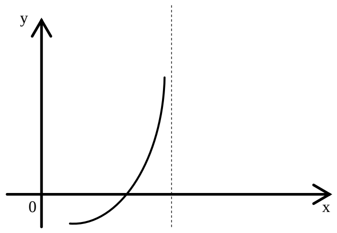
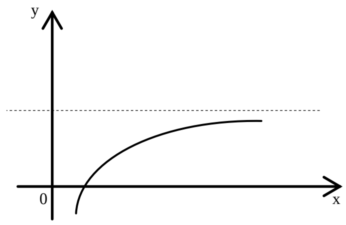
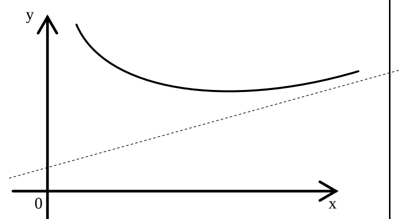
Определение 2.7. Точка графика, в которой выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***.

Достаточное условие существования точек перегиба

Если вторая производная при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Определение 2.8. Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Виды асимптот

Вертикальная	*Горизонтальная*	*Наклонная*
 	 	
Прямая является вертикальной асимптотой графика функции *, или* *, или* .	Прямая где , является горизонтальной асимптотой графика функции	Прямая где , является наклонной асимптотой.

План полного исследования функции

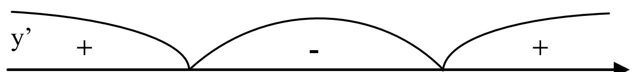
1. Найти область определения функции,
2. Найти точки разрыва и записать уравнения вертикальных асимптот.
3. Исследовать функцию на четность или нечетность.
   Если выполняется условие то данная функция является четной и ее график симметричен относительно оси OY.
   Если выполняется условие то данная функция является нечетной и ее график симметричен относительно начала координат.
4. Найти интервалы монотонности функции и её экстремумы.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.
6. Записать уравнения наклонных асимптот.
7. Используя результаты исследования, в прямоугольной системе координат XOY построить график функции.
   Примечание: при необходимости можно дополнительно найти точки пересечения графика с осями координат.

Пример 6. Провести полное исследование функции *y=f(x)* и построить ее график:
а)
б)
Решение.
а)
1) Функция определена при всех действительных значениях значит,
2) Т.к. областью определения данной функции является вся числовая ось, то точек разрыва функции, а значит, и вертикальных асимптот, не существует.
3) Определим, является ли данная функция четной или нечетной.

Из равенства видно, что т.е. функция не является ни четной, ни нечетной.
4) Найдем интервалы монотонности функции и её экстремумы (если они существуют).
Для этого первую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение

Получили две критические точки, которые разбивают область определения на три интервала:
Определим знак первой производной в каждом интервале:
, значит, на этом интервале функция возрастает.
, значит, на этом интервале функция убывает.
, значит, на этом интервале функция возрастает.



При переходе через точку производная меняет знак с «+» на «-», значит, в этой точке функция имеет максимум, при переходе через точку производная меняет знак с «-» на «+», значит, в этой точке функция имеет минимум. Вычислим значения функции в найденных точках экстремума:

Т.о., функция имеет две точки экстремума:

5) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба (если они существуют).

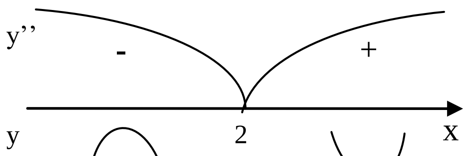
Для этого вторую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение

Получили одну критическую точку, которая разбивает числовую ось на два интервала:

Определим знак второй производной в каждом интервале:

, значит, на этом интервале график функции выпуклый.

, значит, на этом интервале график функции вогнутый.



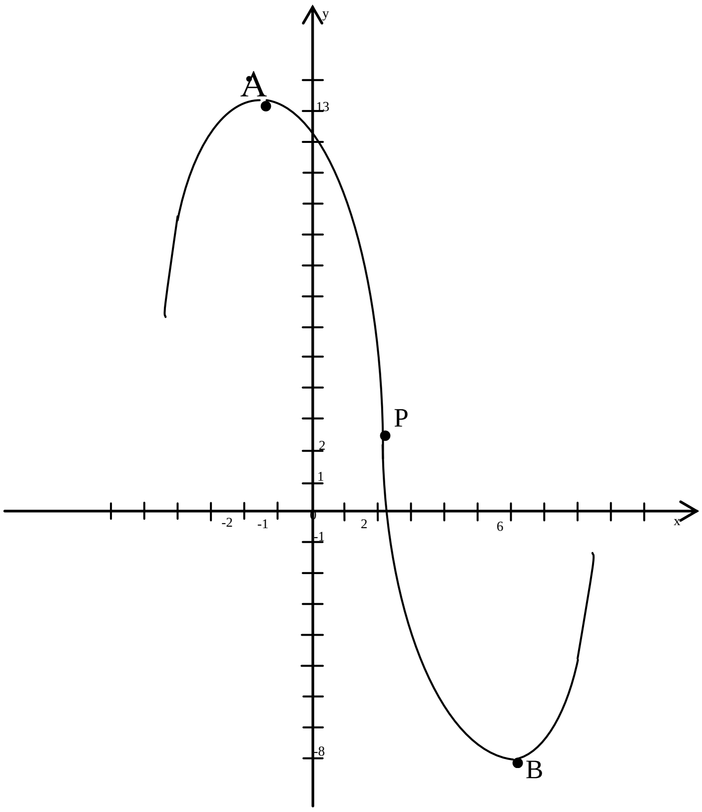
При переходе через точку производная меняет знак с «-» на «+», значит, есть абсцисса точки перегиба графика функции. Вычислим ординату этой точки:

Т.о., – точка перегиба графика функции.

6) Найдем наклонные асимптоты графика функции.

Находятся они по формуле: где . значит, наклонных асимптот данная функция не имеет.

7) В прямоугольной системе координат XOY отметим точки экстремума:
, точку перегиба и построим график данной функции (рисунок 5).



б)

Решение.

1)Областью определения данной функции являются все значения для которых выполняется равенство

Рисунок 5.

Значит,

2) Функция не определена при , значит, есть точка разрыва.

Найдем односторонние пределы:

Прямая является вертикальной асимптотой.

3) Исследуем функцию на четность и нечетность.

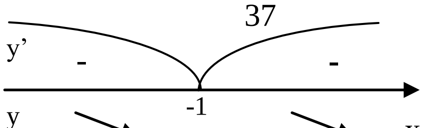
Из равенства видно, что т.е. функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Найдем интервалы монотонности функции и её экстремумы (если они существуют).

Для этого первую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, но , значит, критических точек нет.

Определим знак первой производной в каждом из интервалов области определения. Т.к. , а квадрат любого числа всегда число положительное, то дробь при любом из области определения будет отрицательной. Значит, функция убывает на всей области определения, экстремума она не имеет.



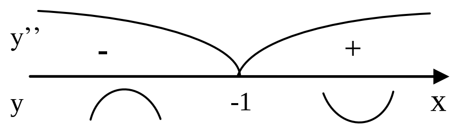
5) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба (если они существуют).

Для этого вторую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, но , значит, критических точек нет. Определим знак второй производной в каждом из интервалов области определения:

, значит, на этом интервале график функции выпуклый.

, значит, на этом интервале график функции вогнутый. Несмотря на то, что при переходе через точку вторая производная меняет свой знак, она не является точкой перегиба, т.к. не принадлежит области определения данной функции. Значит, точек перегиба график данной функции не имеет.



6) Найдем наклонные асимптоты графика функции.

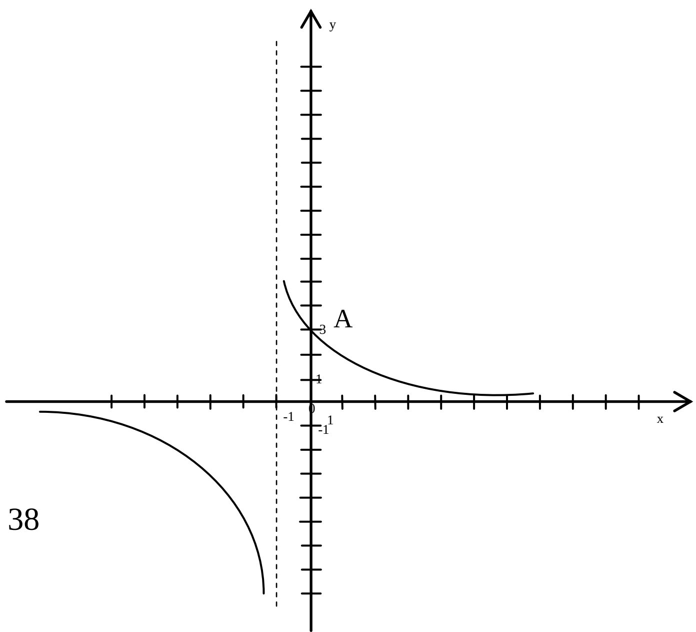
Находятся они по формуле:

где .

Значит, прямая (т.е. ось OX) есть горизонтальная асимптота.

7)Найдем дополнительную точку А – точку пересечения графика функции и оси OY. Абсцисса этой точки равна 0, т.е.

. В прямоугольной системе координат XOY построим



вертикальную асимптоту, отметим точку A(2;0) и, учитывая, что ось *OX* есть горизонтальная асимптота, Рисунок 6.
построим график данной функции (рисунок 6).

Наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a;b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума внутри отрезка, или на границах этого отрезка. Отсюда следует правило для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1.Проверить, что на отрезке $[a;b]$ функция непрерывка (т.е. точки разрыва не принадлежат заданному отрезку).

2.Найти критические точки функции, т.е. точки, где $y' = f'(x) = 0$ или не существует.

3. Выбрать критические точки внутри отрезка.

4. Вычислить значения функции $y = f(x)$ на концах отрезка $[a;b]$и в критических точках внутри этого отрезка. Из полученных значений выбрать самое большое и самое маленькое.

Пример 7.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ на отрезке [-1;2].

Решение.

1. Область определения функции $-\infty < x < +\infty$, значит на отрезке [-1;2] она непрерывна.
2. Находим критические точки.

$y' = (x^3 - 6x^2 + 9x)' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0; 3x^2 - 12x + 9 = 0; x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 3$

3. x=3 не принадлежит отрезку [-1;2].

4. $y(-1) = -1 - 6 - 9 = -16$
$y(2) = 8 - 24 + 18 = 2$
$y(1) = 1 - 6 + 9 = 4$

5. $y(-1) = -16$ - наименьшее значение функции на отрезке [-1;2]

6. $y(1) = 4$ - наибольшее значение функции на отрезке [-1;2]

Вопросы для самопроверки.

1.Сформулируйте определение производной. Общее правило нахождения (четыре шага).

2. Каков геометрический, физический, биологический смысл производной? Примеры.

3. Что называется дифференциалом функции?

4. В чем состоит отличие дифференциала функции от её приращения?

5. Применение дифференциала к приближенному вычислению значению функции.

6. Каковы признаки возрастания и убывания функций?

7. Что называется экстремумом функции? Как найти максимум и минимум функции?

8. Чем отличается максимум функции, заданной на некотором отрезке, от ее наибольшего значения? Тот же вопрос о минимуме и наименьшем значении функции.

9. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Всегда ли они существуют?

10. Как находят интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции?

11.Что называется асимптотой кривой? Как находятся вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

2.2. Задания для самостоятельного решения.

Типовой расчет №1 по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Задание №1. Найти производные указанных функций.

Задание №2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

Задание №3. Исследовать функции и построить графики указанных функций, для функции а) найти наибольшее и наименьшее значение на отрезке.

№	1	2	3

1	а) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}-5\sqrt{x},\ f(4)-?$; б) $y=tgx\cdot(1+2x)$; в) $S(t)=\frac{\ln t}{t+2};t=1$; г) $y=e^{\sin x}$; д) $y=(3x+1)^5$; е) $y=\ln(2-x^2)$; ж) $y=tgx\frac{\varphi}{2}$; з) $y=x^2\cdot\cos(x+1)$.		а) $y=x^3-3x^2+3x$, [-9;2] б) $y=\frac{2}{x-1}$
2	а) $f(x)=2x-\frac{1}{x}+2\sqrt[3]{x},\ f(9)-?$; б) $y=\ln x\cdot(x^2+2)$; в) $y(\varphi)=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi};\varphi=\frac{\pi}{2}$; г) $y=\sin 3x$; д) $y=(x+6)^3$; е) $y=e^{t^2+1}$; ж) $y=tg(2x-1)$; з) $y=\sin x\ln 3x$.		а) $y=x^3-6x^2+9x$, [0;4] б) $y=\frac{3}{x+2}$
3	а) $f(x)=2+\frac{2}{x^2}-\sqrt[4]{x},\ f(1)-?$; б) $y=e^x\cdot(x^3+1)$; в) $g(t)=\frac{t^2}{1+t};t=3$; г) $y=ctg5x$; д) $y=\cos(\varphi^5+1)$; е) $y=(x-2)^4$; ж) $y=e^{2x^3 3}$; з) $y=x\cdot tg2x$.		а) $y=x^3+3x^2+3x$, [-2;4] б) $y=\frac{4}{x-3}$

4	а) $f(x)=2+\frac{2}{x^2}-\sqrt[4]{x},\ f(1)-?;$ б) $y=e^x\cdot\left(x^3+1\right);$ в) $g(t)=\frac{t^2}{1+t};t=3;$ г) $y=ctg5x;$ д) $y=\cos\left(\varphi^5+1\right);$ е) $y=(x-2)^4;$ ж) $y=e^{2x^3 3};$ з) $y=x\cdot tg2x.$		а) $y=x^3-3x^2-9x+3$, [-4;2] б) $y=\frac{1}{x+2}$
5	а) $f(x)=2+\frac{3}{x^3}-2\sqrt[4]{x},\ f(1)-?;$ б) $y=\frac{t^2}{1+t};$ в) $y(\varphi)=(2-\varphi)\cdot tg\varphi;\varphi=0;$ г) $y=\cos(5x-2);$ д) $y=\sqrt{2x-3};$ е) $y=e^{1-x^2};$ ж) $y=\ln(3x+1);$ з) $y=x^2\cdot\sin(5x-1).$		а) $y=x^3-9x^2+24x-2$ [1;5] б) $y=\frac{2}{x+1}$
6	а) $f(x)=3x-\frac{1}{x}+2\sqrt[3]{x},\ f(4)-?;$ б) $y=e^x\cdot(2-3x);$ в) $S(t)=\frac{t^2}{t^2-2};t=0;$ г) $y=ctg\frac{\varphi}{2};$ д) $y=\left(x^3+1\right)^3;$ е) $y=e^{2\cos x};$ ж) $y=\sin\left(x^2+2\right);$ з) $y=x^5\cdot tg5x.$		а) $y=x^3-9x^2+15x-3$, [0;6] б) $y=\frac{3}{x+3}$
7	а) $f(x)=1+\frac{3}{x^4}-\sqrt[3]{x},\ f(1)-?;$ б) $y=\frac{x^2}{x^2-1};$ в) $y(\varphi)=\left(3-\varphi^2\right)\cdot tg\varphi;\varphi=0;$		а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10$ [-2;5]

	г) $y=e^{3\sin x}$; д) $y=tg\sqrt{x}$; е) $y=(2t+1)^3$; ж) $y=\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$; з) $y=x^5\cdot\ln(1-5x)$.		б) $y=\frac{2}{x+6}$
8	а) $f(x)=4x-\frac{1}{x^4}+3\sqrt[3]{x^2}$, $f(1)-?$; б) $y=\frac{x}{x^2+1}$; в) $z(t)=e^t\cdot(3t-1)$; $t=0$; г) $y=e^{5x}$; д) $y=\cos(7\varphi+2)$; е) $y=\ln^3 x$; ж) $y=ctg\sqrt[3]{x}$; з) $y=x^2\cdot\sin\frac{x}{2}$.		а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-2$, [-2;4] б) $y=\frac{5}{x+5}$
9	а) $f(x)=5x-\frac{7}{x}+\sqrt[3]{x}$, $f(4)-?$; б) $y=\frac{x}{x^2-3}$; в) $g(\varphi)=(1-2\varphi)\cdot\sin\varphi$; $\varphi=0$; г) $y=ctg\,3x$; д) $y=\sin(2x+3)$; е) $y=\sqrt{3t-1}$; ж) $y=e^{x^2-1}$; з) $y=x^3\cdot\ln\sin x$.		а) $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x-1$ [0;5] б) $y=\frac{4}{x+2}$
10	а) $f(x)=6x-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x}$, $f(4)-?$; б) $y=\sin x\cdot(1-2x)$; в) $S(t)=\frac{t}{t^2-3}$; $t=1$; г) $y=ctg\,7x$; д) $y=e^{5\sin\varphi}$; е) $y=\cos(x^6-1)$; ж) $y=(x^2+1)^3$;		а) $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+8$, [-1;7] б) $y=\frac{4}{x-2}$

	з) $y=\left(x^2+3\right)\cdot\ln 5x.$		
11	а) $f(x)=3x+\frac{5}{x}-2\sqrt[3]{x},\ f(1)-?;$ б) $y=\ln\left(x^2+2x\right);$ в) $S(t)=\frac{t^2}{t^3+3};t=0;$ г) $y=\sin 7\varphi;$ д) $y=5^{\cos x};$ е) $y=(1-2x)^4;$ ж) $y=tg\left(\frac{x}{2}-1\right);$ з) $y=x^2\cdot e^{-x^2}.$		а) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$ [-4;2] б) $y=\frac{4x}{x-3}$
12	а) $f(x)=3-\frac{1}{x^3}+4\sqrt[3]{x},\ f(1)-?;$ б) $y=\sin(5-3\varphi);$ в) $g(t)=(2t+3)\cdot e^t;t=0;$ г) $y=\ln 2x;$ д) $y=e^{-x^2+1};$ е) $y=ctg(x-1);$ ж) $y=\left(x^2+4\right)^3;$ з) $y=x^3\cdot\cos\frac{x}{3}.$		а) $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{8}x^2+3x-6$ [-2;5] б) $y=\frac{x}{x+2}$
13	а) $f(x)=2x^2+\frac{3}{x^2}-\sqrt[3]{x^2},\ f(4)-?;$ б) $y=\frac{x^2}{x^2+5};$ в) $S(t)=\left(t^2+1\right)\cdot e^t;t=0$ г) $y=tg\left(\varphi^2+1\right);$ д) $y=\cos\frac{x}{7};$ е) $y=\sqrt{x^2-1};$ ж) $y=e^{-x^3+1};$ з) $y=\left(x^3-1\right)\cdot\ln 5x.$		а) $y=\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4$, [0;4] б) $y=\frac{2x}{x-1}$
14	а) $f(x)=3x^3+\frac{4}{x^4}-5\sqrt{x},\ f(1)-?;$		а) $y=-\frac{1}{2}x^3+6x+1$,

	б) $y=\dfrac{t^5}{t^3-1}$; в) $y(\varphi)=(\varphi^2-1)\cdot\sin\varphi;\varphi=0$; г) $y=3^{ctgx}$; д) $y=\ln(3-x^3)$; е) $y=(8t^3-1)^2$; ж) $y=\sqrt{x-2x^2}$; з) $y=x^2\cdot e^{\sin x}$.		[-1;3] б) $y=\dfrac{3x}{x+2}$
15	а) $f(x)=2x^3+\dfrac{1}{3x^3}+\sqrt[3]{x}$, $f(1)-?$; б) $y=\dfrac{x^3}{2-x}$; в) $S(t)=(t^2+3)\cdot e^t;t=0$; г) $y=6^{2x-1}$; д) $y=ctg\,2x$; е) $y=\sin(2\varphi+3)$; ж) $y=(5x^2+3)^4$; з) $y=x\cdot\ln\cos x$.		а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$, [-1;2] б) $y=\dfrac{4x}{x-3}$
16	а) $f(x)=2\cdot x^6-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}$, $f(1)-?$; б) $y=\dfrac{x^3}{2-x^3}$; в) $y(\varphi)=(\varphi^2+3)\cdot\sin\varphi;\varphi=0$; г) $y=ctg\,8x$; д) $y=e^{-t^2+5}$; е) $y=\sqrt{x^4-2}$; ж) $y=\cos\left(\dfrac{x}{3}+2\right)$; з) $y=x^3\cdot\ln tgx$.		а) $y=-\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{9}{8}x^2+3x-6$ [0;4] б) $y=\dfrac{x}{x+2}$
17	а) $f(x)=2x^3-\dfrac{3}{x^2}+4\sqrt[3]{x}$, $f(1)-?$; б) $y=\dfrac{x^3-7}{x^2}$; в) $S(t)=(t^2+1)\cdot\ln t;t=1$; г) $y=e^{6-x^2}$; д) $y=\sin(\varphi^3-1)$;		а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$, [-4;0] б) $y=\dfrac{2x}{x+6}$

	е) $y=\ln(2x+1)$; ж) $y=(x^2-9)^3$; з) $y=x^4\cdot\cos(x-3)$.		
18	а) $f(x)=x^3+\frac{2}{x^2}+3\sqrt[3]{x},\ f(1)-?$; б) $y=\frac{x^2+6}{x^3}$; в) $y(\varphi)=(\varphi+1)\cdot tg\varphi;\varphi=0$; г) $y=\sin\frac{x}{2}$; д) $y=e^{t^3+1}$; е) $y=\ln(3x^3+8)$; ж) $y=\sqrt{x^2+5x^3}$; з) $y=2x^3\cdot\cos\left(-\frac{x}{2}\right)$.		а) $y=2x^3-12x^2+18x$, [0;3] б) $y=\frac{3x}{x-4}$
19	а) $f(x)=x^7+\frac{6}{x}+2\sqrt[3]{x},\ f(1)-?$; б) $y=\frac{x^3-8}{x^2}$; в) $g(t)=(t+5)\cdot e^t;t=0$; г) $y=\sin(x-2)$; д) $y=e^{\cos\varphi+2}$; е) $y=\ln x^3$; ж) $y=(x^2-7)^3$; з) $y=x^4\cdot tg\left(3-\frac{x}{2}\right)$.		а) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x+3$, [2;4] б) $y=\frac{5x}{x+5}$
20	а) $f(x)=x^2-\frac{2}{x^3}+6\sqrt[3]{x},\ f(1)-?$; б) $y=\frac{x^5+1}{x^3}$; в) $S(t)=(t^2-1)\cdot\ln t;t=1$; г) $y=tg(3\varphi-1)$; д) $y=e^{\cos x-3}$; е) $y=\ln\left(x^3-\frac{1}{2}\right)$;		а) $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-3x+4$ [-3;4] б) $y=\frac{5x}{x-2}$

	ж) $y=\sqrt{x^3-1}$; з) $y=x^2\cdot\sin\left(4-x^3\right)$.		
21*	а) $y=\sqrt[7]{x^5}+5x^4-\frac{1}{x},y'(1)$ б) $y=\arcsin x\cdot e^x$ г) $y=\frac{\sin 3t}{\ln t}$ д) $y=tg(x^2)+\sqrt{5-x}$ е) $y=\ln\frac{3x+2}{3x-2}$ ж) $y=\cos\left(\frac{x}{4}-5\right)+e^{3x}$ з) $y=e^{\sqrt{tg\varphi}}+3^{\varphi^3},\varphi(0)$		$y=tg(x^2)+\sqrt{5-x}$ $y=\ln\frac{3x+2}{3x-2}$ а) $y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{9}{5}x^2-3x-3$ [0;6] б) $y=\frac{2x^2}{2x-1}$
22*	а) $y=\frac{1}{6}x^6+8\sqrt[8]{x^3}-x,y'(1)$ б) $y=\frac{e^{2x}}{\cos x}$ в) $y=5^t\cdot tg3t,t=0$ г) $y=\ln\left(x^2+2x\right)$; д) $y=\sqrt{7-2x^3}$; е) $y=x^2\cdot\sin\frac{x}{2}$. ж) $y=arctg\sqrt{4x-1}$		$y=\sin^4 x-\ln 16x$ а) $y=\frac{1}{5}x^3+\frac{6}{5}x^2+3x+7$ $y=arctg\sqrt{4x-1}$ $y^4-3x^4=5x\cdot y$ [-2;6] б) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$
23*	а) $y=4x^3-\frac{6}{x\sqrt{x}}-3,y'(1)$ б) $y=x\cdot e^{-4x}$ в) $y=\frac{\ln 3x}{x+e^{2x}}$ г) $y=3^{\arccos x}-tg\frac{\pi}{4}$		$y=\left(2^{arcctg}+\cos 5x\right)$ а) $y=\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2-3x-4$ $y=\ln\frac{3x^2-1}{3x^2+1}$ [-4;3] б) $y=\frac{4x}{(x-2)^2}$

	д) $y=\sin^4 x-\ln 16x$ е) $S=\sqrt{1-t^3}\cdot 2^t$, t=0 ж) $y=\ln\cos 8x\cdot\cos\pi$ з) $y=\ln\dfrac{3x^2-1}{3x^2+1}$		
24*	а) $y=\sqrt[7]{x^3}-3x^4-\dfrac{1}{x^3}, y'(1)$ б) $y=\arccos\cdot 4^x$ г) $y=\dfrac{tg\,2t}{\ln t}$ д) $y=ctg(x^3)+\sqrt{2+x}$ е) $y=\ln\dfrac{2x+2}{2x-2}$ ж) $y=\cos\left(\dfrac{x}{3}-1\right)+e^{2x}$ з) $y=e^{\sqrt{\sin\varphi}}+5^{\varphi^2}, \varphi(0)$		$y=tg(x^2)+\sqrt{5-x}$ $y=\ln\dfrac{3x+2}{3x-2}$ а) $y=-0{,}2x^3-1{,}2x^2+3x+8$ [-6;2] б) $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$
25*	а) $y=\dfrac{1}{5}x^5+8\sqrt[8]{x^3}-x, y'(1)$ б) $y=\dfrac{e^{5x}}{\cos x}$ в) $y=2^t\cdot\sin 3t, t=0$ г) $y=\ln\left(x^2+2x\right)$; д) $y=\sqrt{7-2x^3}$; е) $y=x^2\cdot\sin\dfrac{x}{2}$. ж) $y=arcctg\sqrt{3x^2-1}$		$y=\sin^4 x-\ln 16x$ $y=arctg\sqrt{4x-1}$ а) $y^4-3x^4=5x\cdot y$ $y=-\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{3}{8}x^2+3x-4$ [-5;4] б) $y=\dfrac{2(x-1)^2}{x^2}$

Прикладные задачи в сельскохозяйственном производстве.

1) Найти скорость изменения популяции бактерии, если в момент времени t(ч) она насчитывает $p(t)=3000+100t^2$

2) Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением $x = te^{-\frac{t^2}{2}}$

Найдите скорость и ускорение в зависимости от t (*x в см, t в с*).

3) Опытным путем установлено, что массу животного при установившемся режиме откорма можно считать функцией времени откорма t, $t \geq 49$ $P = 5\sqrt{t}$ дней, где Р- масса, кг, t – время, дн.

Найти привес животного за 10 дней, начиная с 64 –ого дня кормления.

4) Закон накопления сухой биомассы у некоторого сорта ягод определяется уравнением $y = 0{,}03x - 0{,}0004x^2$

где x – число дней от распускания почек, y – накопление биомассы в кг на 1 куст. Выяснить, как изменится сухая биомасса куста при изменении x от 50 до 60 дней?

5) Зависимость суточного удоя y в литрах от возраста коров x определяется уравнением $y = -9{,}53 + 6{,}8x - 0{,}49x^2, x > 2$

Найти возраст дойных коров, при котором суточный удой будет наибольшим.

6) Зависимость между урожаем озимой пшеницы у (ц/га) и нормой посева семян х (млн. зерен/га) выражается функцией $y = 5{,}6 + 8{,}1x - 0{,}7x^2$

Найдите оптимальную норму посева семян для того. Чтобы получить максимальный урожай.

2.3. Итоговый тест.

1.Производной функции y=f(x) в точке x_0 называется предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}$ **; 2.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ **; 3.** $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$ **; 4.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Lambda x}{\Delta y}$

2.Механический смысл первой производной состоит в следующем:

1. Производная от пути по времени неравномерно движущейся точки равна ускорению в данный момент времени;

2.Производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке;

3. Производная от пути по времени неравномерно движущейся точки равна скорости в данный момент времени;

4. Производная функции в точке равна работе силе, приложенной к этой точке.

3. Пусть популяция в момент t насчитывает p(t)=500+10t^2 особей. Скорость изменения популяции бактерии в момент времени t=2с равна: **1.** 540; **2.** 500; **3.** 520; **4.**40.

4. Производная от частного двух функции находится по формуле:

1. $\frac{u'}{v'}$ **;** **2.** $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ **;** **3.** $\frac{u'v+uv'}{v^2}$ **;** **4.** $\frac{uv'-u'v}{v^2}$

5. Найти дифференциал функции $y=\ln\cos x$

1. $dy=-\frac{\sin x}{x}dx$**;** **2.** $dy=\frac{dx}{\sin x}$**;** **3.** $dy=-tgdx$**;** **4.** $dy=tgdx$

6. Какая из приближенных формул для приращения функции при условии, что $\Delta x\to 0$ ***верна:***

1. $\Delta y\approx f'(x)+\Delta x$; **2.** $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$; **3.** $\Delta y\approx f'(x)-\Delta x$; **4.** $\Delta y\approx f(x)\Delta x$.

7. Укажите при каких «х» функция Y=3-4x+2x^2 убывает:

1.(-∞;1)**;** **2. (1;+**∞)**;** **3. (0;1);** **4. (-**∞;+∞)**.**

8. Если непрерывная функция y=f(x) имеет производную $f'(x)$ ***во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку x=c, и если производная*** $f'(x)$ ***при переходе слева направо через критическую точку x=c меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет:***

1. min; **2.** max; **3.** 0; **4.** точку перегиба.

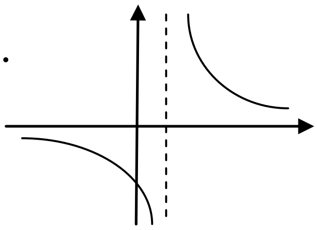
8. График функции в интервале (a;b) выпуклый, если f(x) имеет $f''(x)$ ***в этом интервале, причем:***

1. $f''(x) = 0$; **2.** $f''(x) \neq 0$; **3.** $f''(x) > 0$; **4.** $f''(x) < 0$.

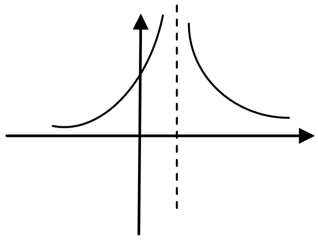
9. Какому графику соответствует сводная таблица:

x	$(-\infty;-1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	-	не существ.	+
$f''(x)$	-		+
f(x)	?		?

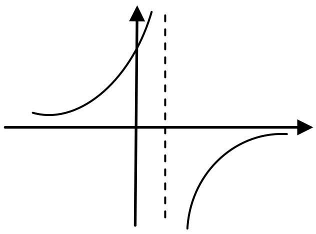
1.



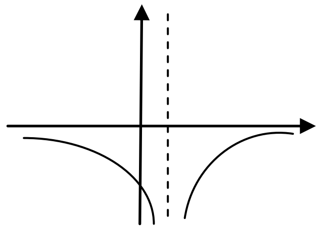
2.



3.



4.



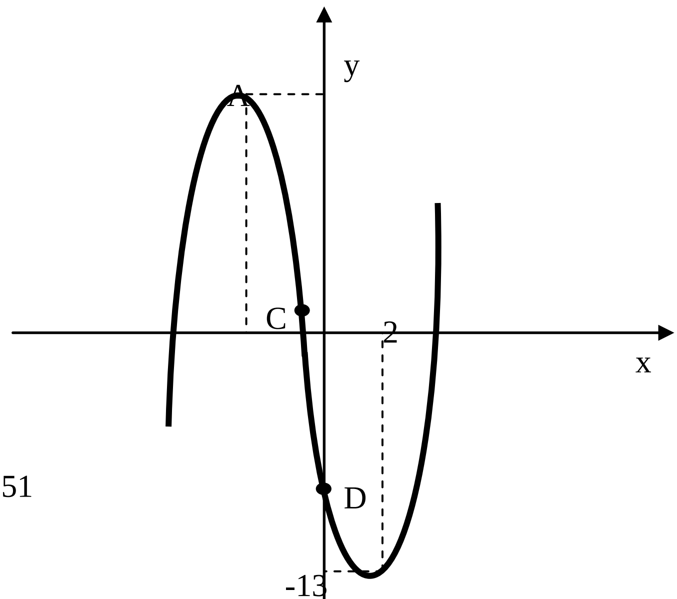
10. Вертикальная и горизонтальная асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x}{x-1}$ ***имеют уравнения:***

1. x=1; y=0; **2.** x=-1; y=2; **3.** x=1; y=2; **4.** x=2; y=1.

11. Точки экстремума для функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x$ ***:***

1. Xmax=3; Xmin=-2; **2.** Xmax=-2; Xmin=3;
3. Xmax=-3; Xmin=2; **4.** Xmax=2; Xmin=-3.

12. Дан график функции.



Какая ему соответствует сводная таблица:

1.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;-0,5)$	-0,5	$(-0,5;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	?	11	?	0,5	?	13	?

2.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;-0,5)$	-0,5	$(-0,5;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	?	11	?	0,5	?	13	?

3.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;-0,5)$	-0,5	$(-0,5;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
f(x)	?	11	?	0,5	?	13	?

4.

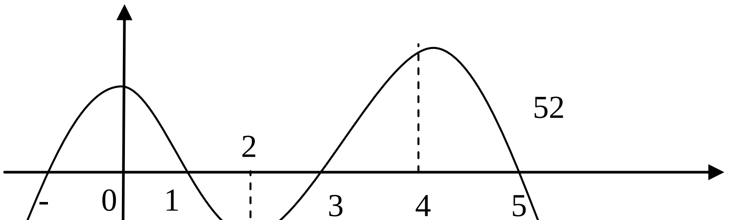
x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;-0,5)$	-0,5	$(-0,5;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
f(x)	?	11	?	0,5	?	13	?

13. Формулы для нахождения коэффициентов наклонной асимптоты:

1. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+kx)$; **2.** $k=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$

3. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$; **4.** $k=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}k\cdot f(x)$.

14. Указать при каких значениях «x» $f'(x)<0$**:**



1. $(-\infty;-1)\cup(1;3)\cup(5;+\infty)$; **2.** $(0;1)\cup(4;5)$; **3.** $(-\infty;0)\cup(2;4)$; **4.** $(0;2)\cup(4;5)$

15. График дифференцируемой функции y=f(x) называется выпуклым на интервале (a; b), если он расположен ___________ любой своей касательной на этом интервале:

1. слева от; **2.** справа от; **3.** ниже; **4.** выше.

16. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{25{,}01}$***, применяя формулу:***

1. $f(x;y)\approx f(x_0;y_0)+f'(x_0)\Delta x; \sqrt{25{,}01}\approx 5{,}001$

2. $f(x;y)\approx f(x_0;y_0)-f'(x_0)\Delta x; \sqrt{25{,}01}\approx 4{,}999$

3. $f(x;y)\approx f(x_0;y_0)+f'(x_0); \sqrt{25{,}01}\approx 5{,}1$

4. $f(x;y)\approx f(x_0;y_0)+\Delta x; \sqrt{25{,}01}\approx 5{,}01$

Глава 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

3.1. Необходимый теоретический минимум и примеры решения типовых задач.

Неопределенный интеграл. Свойства. Методы вычисления.

Определение **3.1.** Функция *F(x)*, определенная на некотором множестве называется первообразной для функции *y=f(x)* на этом множестве, если выполняется условие: $F'(x)=f(x)$.

Замечание 1: Функция *f(x)* имеет множество первообразных, которые отличаются друг от друга на постоянное число и имеют вид *F(x) +C*,т.к. $(F(x)+C)' = F'(x)+C' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x)$.

Определение 3.2. Если *F(x)* – одна из первообразных функции f(x) , то множество функций вида *F(x) +C*, где *C* – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом функции *f(x)* и обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$, где *f(x)* – подынтегральная функция; *f(x)dx* – подынтегральное выражение. Действие нахождения первообразной называется ***интегрированием.***

Свойства неопределенного интеграла.

1.Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2.Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3.Интеграл от дифференциала функции равен самой функции плюс произвольная постоянная $\int dF(x) = F(x)+C$.

Замечание 2: Свойства (2) и (3) неопределенного интеграла указывают на то, что операции интегрирования и дифференцирования являются взаимно обратными.

Знак «d» и $\int$ стоящие рядом взаимно погашают друг друга.

4.Постоянный множитель выносится за знак неопределенного интеграла $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$.

5.Интеграл от суммы конечного числа непрерывных функции равен сумме интегралов от этих функции $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

6. (Инвариантность формулы интегрирования).

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)dx = F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$-произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таким образом, любая формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией. Для вычисления интегралов составлена таблица 2 основных интегралов.

Основные методы интегрирования в неопределенном интеграле.

1.Непосредственное интегрирование по таблице.

Пример 1.

Найти следующие неопределенные интегралы:

$$a)\int\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-4\sqrt{x}+5\cdot 3^x-6\right)dx \quad ; \quad б)\int\frac{dx}{4+x^2};$$

Решение:

$a)$ При вычислении использовали 4 и 5 свойства неопределенного интеграла и табличными формулами интегрирования №1, №2,№7.

$$б)\int\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}arctg\,\frac{x}{2}+C\cdot$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-4\sqrt{x}+5\cdot 3^x-6\right)dx=\int x^{-\frac{1}{6}}dx-4\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\int 3^x dx-6\int dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+5\cdot 3^x/\ln 3-6x+C=\frac{5}{6}\sqrt[6]{x^5}-\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+5\cdot 3^x/\ln 3-6x+C$$

При вычислении использовали табличную формулу №15.

Таблица 2.

1. $\int dx = x+c$;	15. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}+c$
2. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\; n\neq -1;$	16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+t}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+t}\right)+c;$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+c;$	17. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+c;$
4. $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c;$	18. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+c;$
5. $\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+c;$	19. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+c;$

6. $\int e^x dx = e^x + c$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

9. $\int \cos x dx = \sin x + c$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;

12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$;

13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$;

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c$;

20. $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$;

21. $\int \sin ax dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + c$;

22. $\int \cos ax dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + c$;

23. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

Замечание 3. Для приведения интегралов к табличному: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, использовали свойства степени:

$$1/x^n = x^{-n};\quad \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}.$$

2.Метод замены переменной (метод подстановки).

Эффективным методом интегрирования является метод замены переменной. Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно по таблице 2.

Рассмотрим два вида подстановок:

1. Подведение функции под знак дифференциала:

При вычислении интегралов этой подстановкой пользуются формулой:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} u=\varphi(x) \\ du=\varphi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C} \quad (3.1)$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования *u* назад к старой переменной *x*.

В частности если $u=ax+b$, то имеет место формула:

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \left| \begin{matrix} u=ax+b \\ du=adx \\ dx=\frac{1}{a}du \end{matrix} \right| = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C} \quad (3.2)$$

Пример 2.

Найти следующие неопределенные интегралы:

$$а)\int \cos(7x+2)dx; \qquad б)\int \frac{dx}{4-5x}.$$

Решение.

а) Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (3.2) и табличной формулой №9 .

$$\int \cos(7x+2)dx = \left| \begin{matrix} u=7x+1 \\ du=7dx \\ dx=\dfrac{du}{7} \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}\int \cos u du = \frac{1}{7}\sin(7x+2)+C.$$

б) Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (3.2) и табличной формулой №5 .

$$\int \frac{dx}{4-5x} = -\frac{1}{5}\ln(4-5x)+C.$$

Рассмотрим более сложные подстановки:

Пример 3.

Найти неопределенные интегралы.

$$а)\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^3}; \quad б)\int \frac{x^2dx}{2x^3-5}; \quad в)\int \frac{e^{tg3x}}{\cos^2 x}dx.$$

Решение:

$a)$ Применяя метод подстановки, который позволяет свести данный интеграл к табличному №2, получим:

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^3} = \left| \begin{array}{l} 1+\ln x = u \\ \dfrac{dx}{x} = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} dt = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + C$$

$б)$ Применяя метод подстановки, который позволяет свести данный интеграл к табличному №5, получим:

$$\int \frac{x^2 dx}{2x^3 - 5} = \left| \begin{array}{l} 2x^3 - 5 = u \\ 6x^2 dx = du \\ x^2 dx = \dfrac{du}{6} \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln|u| + C = \frac{1}{6} \ln\left|2x^3 - 5\right| + C$$

$в)$ Применяя метод подстановки, который позволяет свести данный интеграл к табличному №6, получим:

$$\int \frac{e^{tg 3x}}{\cos^2 3x} dx = \left| \begin{array}{l} tg 3x = u \\ \dfrac{3}{\cos^2 3x} dx = du \\ \dfrac{dx}{\cos^2 3x} = \dfrac{du}{3} \end{array} \right| = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{tg 3x} + C$$

2. Подстановка вида: $x = \varphi(t)$.

Пусть $x = \varphi(t)$ - функция, непрерывно дифференцируемая на рассматриваемом промежутке, тогда имеет место формула.

$$\boxed{\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \qquad (3.3).$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1}{t^2+1}dt -$$

$$-2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2arctgt + C = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C$$

3. Метод интегрирования по частям.

Пусть функции *u=u(x)* и *v=v(x)* имеют на некотором промежутке непрерывные производные.
Рассмотрим формулу дифференциал от произведения:
$d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем обе части равенства и получим формулу интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv = u \cdot v - \int vdu} \qquad (3.4).$$

В зависимости от подынтегрального выражения различают два вида интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида:
$\int P_n(x) \cdot e^{kx}dx$; $\int P_n(x) \cdot a^{kx}dx$; $\int P_n(x) \cdot \sin kxdx$; $\int P_n(x) \cdot \cos kxdx$, где
$P_n(x)$- алгебраический многочлен; *k* – некоторое число.

Во всех интегралах обозначим за $u = P_n(x)$, а оставшееся выражение за *dv*, причем при нахождении *v* не записываем константу.

2. Интегралы вида:
$\int x^a \ln xdx$; $\int P_n(x) \cdot \ln xdx$; $\int P_n(x) \cdot \arcsin kxdx$; $\int P_n(x) \cdot arctgkxdx$,
где *a*- число.

В этих случаях за *u* принимаем *lnx, arctgkx, arcsinkx* соответственно, а оставшееся выражение за *dv*.

Пример 5. Вычислить неопределенные интегралы:
$a)\int x \cdot \sin 2xdx$; $б)\int x^3 \ln xdx$.

Решение:

$a)$ Подынтегральное выражение соответствует интегралу первого вида, применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\cdot\sin 2xdx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin 2xdx \\ du=dx & v=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right|=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=-\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$б)$ Подынтегральное выражение соответствует интегралу второго вида, применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x^3\cdot\ln xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln x & dv=x^3dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\end{matrix}\right|=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$$

Определенный интеграл. Свойства. Геометрический и биологический смысл.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана некоторая непрерывная функция $f(x)$.

Разобьем этот отрезок на n произвольных частей, обозначая точки деления через $a_0=x_0<x_1<x_2<.....x_{n-1}<x_n=b$, а длины полученных промежутков $\Delta x_1;\Delta x_2;.....\Delta x_n$. В каждом из отрезков $\left[x_{i-1};x_i\right]$ выберем произвольную точку α_i, значение функции в выбранной точке $f(\alpha_i)$умножим на длину соответствующего отрезка и составим сумму всех таких произведений: $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\alpha_i)\Delta x_i$,полученная сумма называется ***интегральной.***

Пусть $l=\max\{\Delta x_i\}$-длина наибольшего из элементарных отрезков Δx_i разбиения.

Определение 3.3. Определенным интегралом от функции *f(x)* на отрезке [*a;b*] называется предел соответствующей интегральной суммы при условии, что длина наибольшего элементарного отрезка стремится к нулю, причем значение этого предела не зависит ни от способа разбиения отрезка, ни от выбора произвольной точки.

Обозначается:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{l \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i} \qquad (3.5)$$

Основные свойства определенного интеграла.

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x) \cdot$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \cdot$$

3. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx \cdot$$

4. Интеграл от суммы непрерывных функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x) + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx \cdot$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x).$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Определение 3.4. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная справа и слева прямыми $x=b$ и $x=a$, снизу отрезком $[a;b]$ оси OX, сверху графиком функции $y=f(x)$ (рис.1).

Геометрически определенный интеграл равен площади соответствующей криволинейной трапеции:

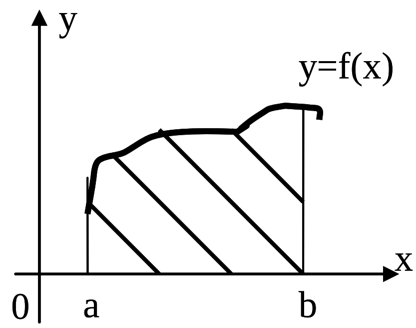


Рисунок 7

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S_{кр.тр.}} \tag{3.6}$$

Биологический смысл определенного интеграла.

Пусть известна скорость *v(t)* роста некоторой популяции, тогда прирост ее численности *N(t)* за промежуток времени от t_1 до t_2 равен определенному интегралу:

$$\boxed{N(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt} \tag{3.7}$$

Пример 6. Скорость роста некоторой популяции описывается уравнением $V=v_0 + v$, где $v_0 = 4000$ (особей в секунду) – начальная скорость роста, $v=300t^2$ *ос/сек*. Найти прирост популяции за 2 секунды.

<u>Методы вычисление определенного интеграла.</u>

Для вычисления определенного интеграла, когда, применяется формула ***Ньютона-Лейбница:***

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)} \qquad (3.8),$$

где $F(x)$- первообразная для функции $y = f(x)$, находится по таблице №2 неопределенных интегралов.

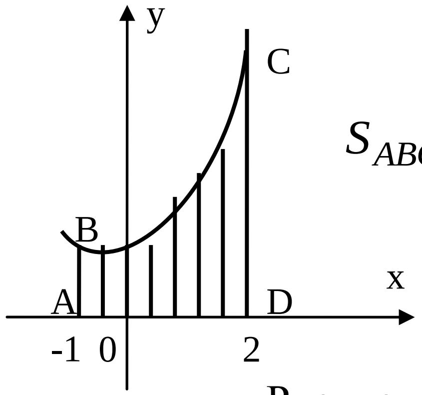
Пример 7. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{2}(x^2+1)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница и построить соответствующую данному интегралу криволинейную трапецию.

Решение.

Для вычисления определенного интеграла применим формулу (3.8) Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int\limits_{-1}^{2}(x^2+1)dx = (\frac{x^3}{3}+x)\Big|_{-1}^{2} = (\frac{2^3}{3}+2)-(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)) = 6.$$

Геометрически определенный интеграл (3.6) представляет площадь фигуры, ограниченной сверху графиком подынтегральной функции $f(x) = x^2+1$, снизу осью Ох, слева прямой х=-1 и справа прямой х=2 (рисунок 8).



$S_{ABCD} = 6 кв.ед.$

Рисунок 8

Построим фигуру, для этого найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1;2);$$

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B(2;5).$$

Замена переменной в определенном интеграле.

Если при вычислении определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции *f(x)* требуется ввести новую переменную *t*, такую что $x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,

где функция $\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, то

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\varphi'(t)dt} \qquad (3.9)$$

Замечание 3: При замене переменной в определенном интеграле обязательно нужно перейти к новым пределам интегрирования.
Замечание 4: Изменение пределов в определенном интеграле при его вычислении позволяет не возвращаться к первоначальной переменной интегрирования.

Пример 8. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^5 x\sqrt{3x+1}dx$ методом замены переменной.
Решение.

$$\int\limits_0^5 x\sqrt{3x+1}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{3x+1} = t \Rightarrow 3x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{3} \Rightarrow dx = \dfrac{2}{3}tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 5 \Rightarrow t = 4 \end{array} \right| = \int\limits_1^4 \frac{t^2-1}{3} \cdot t \cdot \frac{2}{3}tdt =$$

$$= \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^5}{5} - \frac{4^3}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2754}{15} = 40{,}8$$

<u>Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.</u>

Понятие определенного интеграла широко применяется для вычисления различных геометрических величин (площадей плоских фигур, объемов тел вращения, площадей поверхностей и т.д.).

Из геометрического смысла определенного интеграла можно найти площадь фигуры *ABCD* (рисунок9), ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми *x=a* и *x=b*, которая вычисляется по формуле:

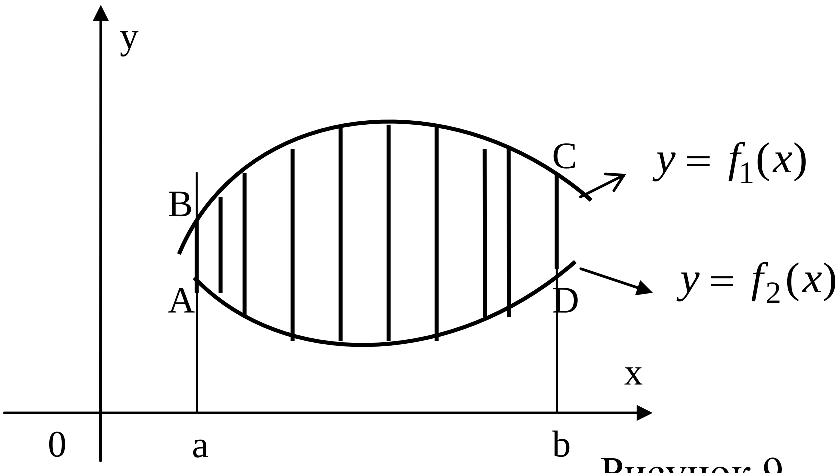


Рисунок 9

$$\boxed{S_{ABCD} = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx} \tag{3.10}$$

Пример 9.

Вычислить площадь участка (га), ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{3}x^2; \qquad y = -x + 6$$

Найти урожайность сои с данного участка при урожайности 10 ц/га.

Решение.

Построим чертеж участка, найдём точки пересечения линий.

Решим систему:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x^2 + 3x - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x_1 = \frac{-3 - 9}{2} = -6 \\ x_2 = \frac{-3 + 9}{2} = 3 \end{cases}$$

Точки пересечения линий: *A(-6; 12); B(3;3)*

Участок представляет собой фигуру *AOB*, ограниченную сверху прямой $f_1(x) = -x + 6$, снизу параболой $f_2(x) = \frac{1}{3}x^2$ (рис.4).

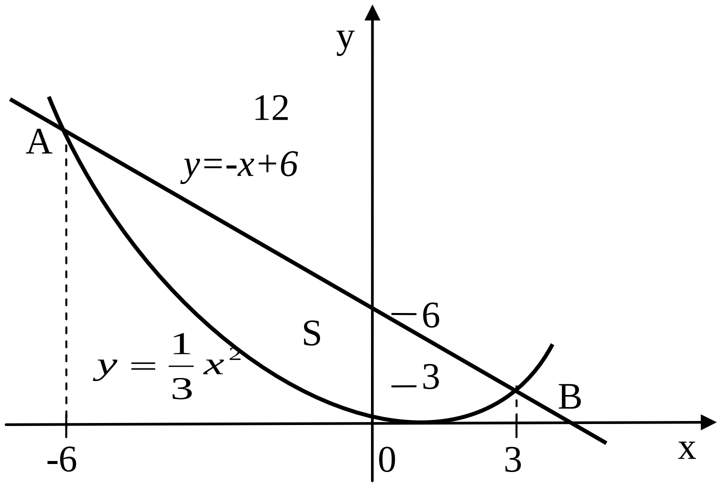


Рисунок 10

Вычисление площади осуществляем по формуле (3.10).

В нашем случае

$$f_1(x) = -x + 6; \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x^2.$$

$$S_{AOB} = \int_{-6}^{3}\left[(-x+6) - \frac{1}{3}x^2\right]dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-6}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{9}{2} + 18 - \frac{3^3}{3^2}\right) - \left(-\frac{36}{2} - 36 - \frac{(-6)^3}{9}\right) = (-4{,}5 + 18 - 3) - (-18 - 36 + 24 =$$

$$= 11{,}5 + 30 = 41{,}5(\text{кв.ед.}).$$

1 кв. ед. = 1га, следовательно: S=41, 5 га,

Вычислим урожайность сои с данного участка:

У=10ц/га * 4,5га =45 ц.

<u>Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.</u>

В определении определенного интеграла считается, что интервал интегрирования конечен и подынтегральная функция на нем непрерывна. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то интеграл называется ***несобственным.***

Если не выполняется первое условие, то имеем несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования.

За значение интеграла принимается предел, к которому стремиться соответствующий определенный интеграл при стремлении пределов интегрирования к бесконечности:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad (3.11)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad (3.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx \qquad (3.13).$$

Если указанные пределы конечны, то говорят, что несобственные интеграл сходится. Если же предел бесконечен (не существует), то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Пример 10. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int_0^{\infty} e^{-5x}dx$; б) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x+2}$; в) $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$.

Решение.

$$a)\int_0^{\infty} e^{-5x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty} e^{-5x}\Big|_0^b = -\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-5b}-e^0\right) =$$

$$-\frac{1}{5}\left(e^{-\infty}-1\right) = -\frac{1}{5}(0-1) = \frac{1}{5} - \text{\textit{несобственный интеграл сходится}}$$

Замечание 5: $e^{-\infty}\to 0$, т.к. $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty}\to 0$.

$$б)\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x+7} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-2}\frac{dx}{x+7} = \lim_{a\to-\infty}\ln(x+7)\Big|_a^{-2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\ln 5 - \ln|a+7|\right) =$$

$$= \ln 5 - \ln\infty = \ln 5 - \infty = -\infty - \text{\textit{несобственный интеграл расходится.}}$$

в) В заданном интеграле применяем подстановку в определенном интеграле.

Пусть $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$, если *x=3*, то *t=ln3;* $x\to\infty$, то $t\to\infty$, получим:

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}=\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 3}^{b}\frac{dt}{t^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{\ln 3}\right)=\frac{1}{\ln 3}$$

,

т.к. при $b\to\infty\ \Rightarrow\frac{1}{b}\to 0$ - *интеграл сходится.*

Вопросы самопроверки.

1.Сформулируйте определение первообразной. Основное свойство.

2.Что называется неопределенным интегралом?
 Каков его геометрический смысл?

3.Основные свойства неопределенного интеграла.

4.Таблица неопределенных интегралов.

5.Метод подстановки в неопределенном интеграле.

6. Выведите формулу интегрирования по частям. Каким образом разбивается интеграл на части в зависимости от подынтегрального выражения?

7. Каким действием можно проверить интегрирование?

8. Сформулируйте определение определенного интеграла и укажите его геометрический смысл, механический и биологический смысл.

9. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

10. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.

11. Методы вычисления определенного интеграла.

12. Каким образом вычисляется площадь фигуры с помощью определенного интеграла.

13. Дайте определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Приведите примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

3.2. Задания для самостоятельного решения.

Контрольная работа №2 по теме «Неопределенный интеграл».

Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int\left(8x^3-\frac{2}{x^4}+1\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{9+x^2}$;

в) $\int\ cos(8x+1)dx$; г) $\int \frac{x^2dx}{5x^3+1}$; д) $\int 6x\ cosxdx$.

2. а) $\int\left(7x^2-\sqrt[3]{x}+2\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

в) $\int \sin(7x+1)dx$; г) $\int \frac{x^3dx}{2x^4+1}$; д) $\int 4x\cdot e^x dx$.

3. а) $\int\left(x^9-\sqrt[4]{x}+3\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{16+x^2}$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$; г) $\int \frac{3x^5dx}{x^6+3}$; д) $\int 2x\cdot \sin xdx$.

4. а) $\int\left(2x^3-\frac{5}{x^4}+7\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$; г) $\int \frac{3x^4dx}{x^5+4}$; д) $\int 3x\cdot e^x dx$.

5. а) $\int\left(7x^2-\frac{1}{x^3}+8\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-4}$;

в) $\int e^{7x}dx$; г) $\int \frac{2x^3dx}{x^4+7}$; д) $\int x\cdot \ln xdx$.

6. а) $\int\left(x^6-\frac{2}{x}-x/3\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-25}$;

в) $\int \frac{dx}{2x-1}$; г) $\int \frac{x\ dx}{\left(x^2-3\right)^2}$; д) $\int 3x\cdot \cos xdx$.

7. а) $\int\left(8x^2-\sqrt[3]{x}-1/7\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{1+4x}$; г) $\int \frac{x^2dx}{\left(1-2x^3\right)^2}$; д) $\int 7x\cdot 8^x dx$.

8. а) $\int\left(2x^4-\frac{8}{x^2}+5\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{4-x^2}$;

в) $\int \cos(3x-8)dx$; г) $\int \frac{x\ dx}{\left(1-5x^2\right)^2}$; д) $\int 8x\cdot \sin x dx$.

9. а) $\int\left(x^5-\frac{1}{9x}+4x\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

в) $\int\frac{dx}{(9-2x)^2}$; г) $\int\frac{3x\ dx}{\left(3-x^2\right)^2}$; д) $\int 6x\cdot 4^x dx$.

10. а) $\int\left(x^7-\sqrt[6]{x}-10\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{36+x^2}$;

в) $\int e^{10x}dx$; г) $\int\frac{x\ dx}{\left(x^2-3\right)^3}$; д) $\int 3x^2\cdot \ln x dx$.

11. а) $\int\left(4x^2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{36-x^2}$;

в) $\int\frac{dx}{7x+11}$; г) $\int x\cdot\sqrt{1+x^2}dx$; д) $\int x\cdot\cos 6x dx$.

12. а) $\int\left(3x^5-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$;

в) $\int\frac{dx}{2x+12}$; г) $\int x^2\cdot\sqrt{2+x^3}dx$; д) $\int x\cdot e^{-3x}dx$.

13. а) $\int\left(\sqrt[5]{x}+7-6x^2\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{49-x^2}$;

в) $\int\frac{dx}{\sin^2 6x}$; г) $\int\frac{x\ dx}{\sqrt{2-x^2}}$; д) $\int 2x\cdot\sin 8x dx$.

14. а) $\int\left(\sqrt[7]{x}+7-6x^3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-36}}$;

в) $\int\frac{dx}{\cos^2 x/6}$; г) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-3x^3}}$; д) $\int 2x^4\cdot\ln x dx$.

15. а) $\int\left(x^{11}-\frac{4}{x^5}-\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{2-x/3}$; г) $\int e^{x^2}\cdot x dx$; д) $\int 2x \cdot \cos 5x dx$.

16. а) $\int \left(2x^7 - \frac{4}{\sqrt[5]{x}} - \frac{2}{x^7}\right) dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+7}$;

в) $\int tg 2x dx$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; д) $\int 2x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$.

17. а) $\int \left(3x^8 - \frac{4}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{x^8}\right) dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-10}$;

в) $\int ctg 7x dx$; г) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{5x^4-1}}$; д) $\int 3x \cdot \sin \frac{x}{3} dx$.

18. а) $\int \frac{2-x^4-\sqrt{x}}{x} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$;

в) $\int \frac{dx}{2-x/3}$; г) $\int 8^{x^2}\cdot x dx$; д) $\int 3x \cdot \sin x/7 dx$.

19. а) $\int \frac{8-x^2-2\sqrt{x}}{x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+12}$;

в) $\int \frac{dx}{5-x/18}$; г) $\int e^{tgx} \frac{dx}{\cos^2 x}$; д) $\int 9x \cdot \cos 18x dx$.

20. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2-9\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x/12}$; г) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$; д) $\int 6x \cdot e^{-\frac{x}{5}} dx$.

21*. а) $\int \frac{e^x\sqrt{x}+4x-7}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{4x^2-9}$;

в) $\int 4^{8x} dx$; г) $\int \frac{\sqrt[4]{arctg^3} dx}{1+x^2}$; д) $\int (4x+5)e^{-3x} dx$.

22*. а) $\int \frac{3^x\sqrt{x}-4x^2+5}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$;

в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x/6}$; г) $\int \sin x \cdot \sqrt{\cos^3 x} dx$; д) $\int (2x+5)\sin 4x dx$.

23*. а) $\int \frac{tgx\sqrt{x} - x^3 + 3}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{9x^2 - 5}$;

в) $\int \frac{dx}{2 - x/8}$; г) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+3e^x}}$; д) $\int (8x-1)\cos 6x dx$.

24*. а) $\int \frac{4 - x + \sqrt[3]{x}\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 7}}$;

в) $\int tg(x/4) dx$; г) $\int \frac{e^x dx}{4 + e^{2x}}$; д) $\int \arcsin 2x dx$.

25*. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x}e^x - 3}{\sqrt[4]{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{3x^2 - 16}$;

в) $\int ctg(x/2) dx$; г) $\int \frac{(1+5tgx)^3 dx}{\cos^2 x}$; д) $\int arctg 2x dx$.

Типовой расчет №2 по теме «Определенный интеграл».

Задание№1(а) - вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница и построить соответствующую данному интегралу криволинейную трапецию.
Задание№1(б) - вычислить определенный интеграл методом замены переменной.
Задание№2. – вычислить площадь участка, ограниченного линиями. Найти урожайность культуры данного участка.
Задание №3 – вычислить несобственный интеграл.

№	**Номера заданий**		
	1	**2**	**3**
1.	а) $\int_0^4 2x dx$;	$y = x^2 - 3$ $y = 4x - 6$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$

	б) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.	Ячмень – 18ц/га.	
2.	а) $\int_0^3 3xdx$; б) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.	$y = x^2 - 2$ $y = 3x + 2$ Пшеница– 13ц/га.	$\int_0^\infty e^{2x}dx$
3.	а) $\int_0^6 (x+3)dx$; б) $\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$.	$y = x^2 + 4$ $y = 4x + 1$ Овес – 20 ц/га.	$\int_3^\infty \frac{dx}{x + 2}$
4.	а) $\int_2^4 (x+4)dx$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$.	$y = x^2 + 2$ $y = -x + 4$ Картофель-93ц/га.	$\int_{-\infty}^0 e^x dx$
5.	а) $\int_0^2 (2x+3)dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+4}+3)}$	$y = x^2 - 1$ $y = -x + 1$ Рис – 25 ц/га.	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$
6.	а) $\int_0^4 (2x+1)dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+5}(\sqrt{x+5}-1)}$.	$y = x^2 + 1$ $y = 4x - 2$ Соя – 9 ц/га.	$\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$
7.	а) $\int_0^3 (2x+4)dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{9-x}(\sqrt{9-x}+2)}$.	$y = x^2 + 5$ $y = x + 7$ Рожь – 10ц/га.	$\int_0^\infty \frac{dx}{(x + 7)^2}$

8.	а) $\int_0^4 (2x+5)dx$; б) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+1)}$.	$y=x^2+1$ $y=x+3$ Свекла – 190 ц/га.	$\int_0^{\infty} e^{x/2}dx$
9.	а) $\int_0^6 (3x+1)dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.	$y=x^2-3$ $y=-x-1$ Сено – 22ц/га.	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x\ \ +3)^3}$
10.	а) $\int_0^5 (2x+2)dx$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.	$y=x^2+1$ $y=3x+5$ Ячмень – 19ц/га.	$\int_{-\infty}^0 e^{-3x+1}dx$`
11.	а) $\int_1^4 (3x+2)dx$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$.	$y=3x^2+1$ $y=3x+7$ Рожь – 16ц/га.	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{3x+1}$
12.	а) $\int_0^2 (4-x)dx$; б) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.	$y=3x^2+2$ $y=3x+8$ Овес – 19 ц/га.	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1}$
13.	а) $\int_2^6 (8-x)dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-4}$.	$y=2x^2$ $y=x^2+4$ Зеленая масса травы – 115ц/га.	$\int_{-\infty}^0 \frac{2xdx}{x^2-1}$
14.	а) $\int_{-1}^0 (2-3x)dx$;	$y=3x^2+4$ $y=3x\ \ +10$	$\int_1^{\infty} e^{-4x+1}dx$

	б) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+9}$.	Соя – 10 ц/га.	
15.	а) $\int_2^6 (7-x)dx$; б) $\int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}$.	$y=3x^2$ $y=x^2+3$ Рис – 26 ц/га.	$\int_0^\infty \frac{dx}{4x+2}$
16.	а) $\int_0^3 (x^2+3)dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+16}$.	$y=2x^2$ $y=8$ Свекла – 193 ц/га.	$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{2x+4}$
17.	а) $\int_0^5 (x^2+4)dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.	$y=x^2$ $y=2x^2-9$ Рожь – 15 ц/га.	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$
18.	а) $\int_{-1}^1 (x^2+1)dx$; б) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$.	$y=-x^2+2$ $y=x^2$ Ячмень – 20ц/га	$\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$
19.	а) $\int_{-2}^0 (x^2+2)dx$; б) $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+4}$.	$y=x^2$ $y=-x^2+8$ Пшеница -14ц/га.	$\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2xdx}{x^2-1}$
20.	а) $\int_0^1 (x^2-1)dx$; б) $\int_0^{25} \frac{\sqrt{x}dx}{x-9}$.	$y=3x^2$ $y=-x^2+4$ Сено – 25 ц/га.	$\int_{-\infty}^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$

21*.	а) $\int_0^3 \frac{x^3}{3}dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+4}dx$.	$y = x^2 - 4x + 3$ $y = x - 1$ Картофель-98ц/га	$\int_0^\infty \frac{\ln^3 x \cdot dx}{x}$
22*.	а) $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{2}dx$; б) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+9}dx$.	$y = x^2 - 9x + 18$ $y = 8 - 2x$ Ячмень – 20ц/га.	$\int_0^\infty \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}$
23*.	а) $\int_0^2 2x^3dx$; б) $\int_4^{11} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}+1}dx$.	$y = x^2 - 7x + 12$ $y = -2x + 6$ Соя – 11ц/га.	$\int_0^\infty \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{1-x^5}}$
24*.	а) $\int_1^e \frac{9}{x}dx$; б) $\int_1^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$.	$y = x^2 - 9x + 14$ $y = -2x + 4$ Свекла кормовая-193ц/га	$\int_0^\infty \frac{arctgx \cdot dx}{x^2+1}$
25*.	а) $\int_1^e \frac{5}{x}dx$; б) $\int_1^{20} \frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{x+7}+1}dx$.	$y = 2x^2 - 6x - 2$ $y = -x^2 + x - 4$ Рис – 25 ц/га.	$\int_3^\infty \frac{x \cdot dx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$

3.3. Итоговый тест.

1. Какие из перечисленных функций: а) $x^4 + 5$***; б)*** $x^4/4+1$***; в)*** $x^4 - \sqrt{3}$***; г) 12*** x^3***; д)*** $x^4/4-1$ ***являются первообразными для функции*** $f(x) = 4x^3$***:***

1. б,в; **2.** г; **3.** а,в; **4.** д.

2. Чему равно выражение $\int d(x^3)$***:***

1. $x^3 + C$; **2.** $3x^2 + C$; **3.** $x^4/4 + C$.

3. Интеграл $\int \frac{dx}{x^5}$ ***равен:***

1. $5x^6 + C$; **2.** $\frac{1}{x^4} + C$; **3.** $-\frac{1}{4x^4} + C$; **4.** $\frac{x^6}{6} + C$.

4. Для каких интегралов подходит подстановка $t = x^2 + 1$***:***

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$; **2.** $\int \frac{arctgx}{x^2+1}dx$; **3.** $\int \frac{dx}{x^2+1}$; **4.** $\int (x^2+1)dx$.

5. Укажите целесообразную подстановку для интеграла $\int e^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$

1. $t = \cos x$; **2.** $t = e^{tgx}$; **3.** $t = tgx$; **4.** метод не подходит.

6. Первообразная $\arcsin\frac{x}{5} + C$ ***соответствует интегралу:***

1. $\int \frac{dx}{25 - x^2}$; **2.** $\int \frac{dx}{25 - x^2}$; **3.** $\int \frac{dx}{25 + x^2}$; **4.** $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$.

7. Интеграл $\int e^{8x}dx$ ***равен:***

1. $e^{8x} + C$; **2.** $8e^{8x} + C$; **3.** $1/8e^{8x} + C$; **4.** $e^x + C$.

8. Формула интегрирования по частям имеет вид:

1. $\int udv = u + v - \int vdu$; **2.** $\int udv = u \cdot v - \int vdu$;

3. $\int udv = \int vdu - uv$.

9. В интеграле $\int 2x^2 \sin 3xdx$***, применяя метод интегрирования по частям, за «u» и «dv» берут следующие выражения:***

1. $u = 2x^2 \quad dv = \sin 3x dx$; **2.** $u = \sin 3x \quad dv = 2x^2 dx$;

3. $u = 4x \quad dv = \sin 3x dx$; **4.** $u = 1/3 \sin 3x \quad dv = 2x^2 dx$

10. Определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ ***называется предел:***

1. $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$**:**

2. $\lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$**;**

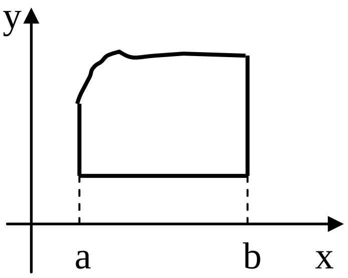
3. $\lim\limits_{\Delta x \ \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha\ )\Delta x_i$**;**

3. $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$**,**

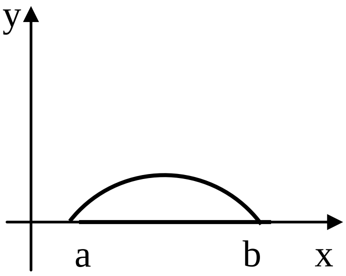
где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \alpha_i \in [x_{i-1}; x_i], i = 1,..n.$

11.Какие из фигур являются криволинейными трапециями?

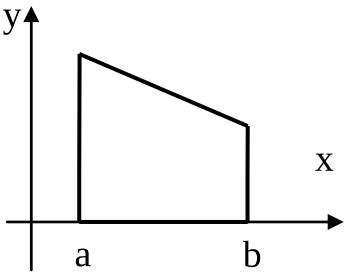
А)



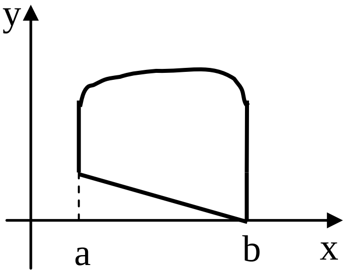
Б)



Г)



В)



1. А,Г.
2. Б,В.

3. В,Г. **4.** Б,Г.

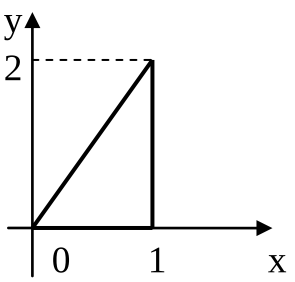
12. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$***:***

1. -0,5; **2.** 2; **3.** 0,5; **4.** 1.

13. Интеграл $\int\limits_0^3 \sqrt{x+1}dx$ ***в результате подстановки*** $\sqrt{x+1}=t$ ***преобразуется в интеграл:***

1. $2\int\limits_0^2 t^3dt$; **2.** $2\int\limits_0^3 t^3dt$; **3.** $2\int\limits_1^2 t^2dt$; **4.** $\int\limits_0^3 t^2dt$.

14. Какой интеграл равен площади указанной фигуры:



1. $\int\limits_0^2 xdx$; **2.** $\int\limits_0^1 2xdx$;

3. $\int\limits_0^1 xdx$; **4.** $\int\limits_0^1 \frac{x}{2}dx$.

15. Установить соответствие между несобственными интегралами и их поведением сходимости.

1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$	*а)Сходится*
2) $\int\limits_{-\infty}^2 2xdx$	*б)Расходится*
3) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$	

16. Интеграл $\int \frac{dx}{x-2}$ ***равен:***

1. $\ln|x-2|+C$; **2.** $(x-2)^2+C$;

3. $x^2/2-2x+C$; **4.** $(x-2)^{-2}+C$.

17. Выполнить действие $d\left(\int \cos xdx\right)$***:***

1. $\sin x$; **2.** $\cos x$; **3.** $\sin x + C$; **4.** $\cos xdx$.

18. Чему равен интеграл $\int f(kx+b)dx$***, если k – число, а*** $\int f(x)dx = F(x)+C$:

1. $F(kx+b)+C$; **2.** $kF(kx+b)+C$;

3. $\frac{1}{k}F(kx+b)+C$; **4.** $-kF(kx+b)+C$.

19. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются с помощью формулы по частям:

1. $\int e^{x^2}xdx$; **2.** $\int e^x xdx$; **3.** $\int \cos^2 xdx$; **4.** $\int x^2\cos 2xdx$.

20. Интеграл $\int x^2\ln xdx$ ***равен:***

1. $2x\ln x-x+C$; **2.** $\frac{x^3}{3}\ln x+C$; **3.** $2x\ln x+C$; **4.** $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$.

21. Интеграл $\int_0^1\left(2x^2-2x-7\right)dx$ ***равен:***

1. $-7\frac{1}{3}$; **2.** $-8\frac{2}{3}$; **3.** $6\frac{1}{3}$; **4.** $7\frac{2}{3}$.

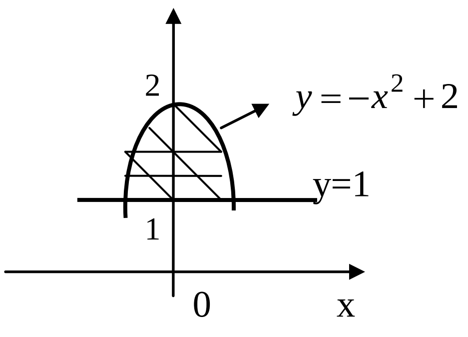
22. Интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin 2xdx$ ***равен:***

1. 1; **2.** 2; **3.** -1; **4.** 0.

23. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: y=6x, y=0, x=1, x=2:

1. 3; **2.** 6; **3.** 1; **4.** 9.

24. Площадь указанной фигуры равна:



1. $\frac{2}{3}$; **3.** $2\frac{2}{3}$;

2. $\frac{4}{3}$; **4.** 1.

25. Несобственный интеграл $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(3x+1)^2}$

1. расходится; **2.** равен 1; **3.** равен 1/3; **4.** равен -1/3.

Глава 4. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

4.1. Необходимый теоретический минимум и примеры решения типовых задач.

Определение функции двух переменных. График. Область определения.

Определение 4.1. Переменная Z называется функцией двух переменных x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение Z.

Функциональная зависимость обозначается: $z = f(x;y)$.

Определение 4.2. Областью определения функции $z = f(x;y)$ называется совокупность точек *(x;y)*, в которых данная функция определена, т.е. принимает действительные значения. Обозначается $D(f)$.

Геометрически область определения функции двух переменных является или вся координатная плоскость XOY, или ее часть.

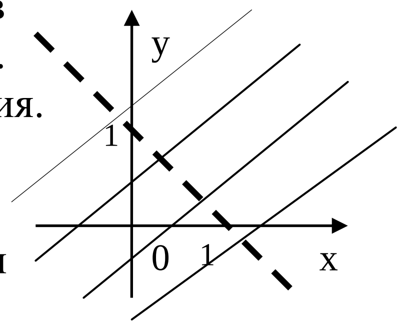


Рисунок 12

График функции двух переменных.

Пусть дана функция $z = f(x;y)$. В прямоугольной системе координат $OXYZ$ каждой точке $(x;y) \in D(f)$ соответствует одно значение $z = f(x;y)$. Тем самым определяется упорядоченная тройка чисел $(x, y, f(x;y))$ или точка пространства *M(x,y,z)*. Таких точек можно определить сколько угодно много. Предположим, что точка *(x,y)* «пробегает» всю область $D(f)$. Тогда соответствующая точка пространства $M(x, y, f(x;y))$ будет описывать в пространстве некоторую поверхность, называемую ***графиком функции двух переменных*** (рисунок 13).

Пример 1.

Найти область определения следующих функций:

а) $z = x^2 - 2xy + 6$; б) $z = \dfrac{4}{x + y - 1}$; в) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

г) $z = \ln(4 - y + 3x^2)$.

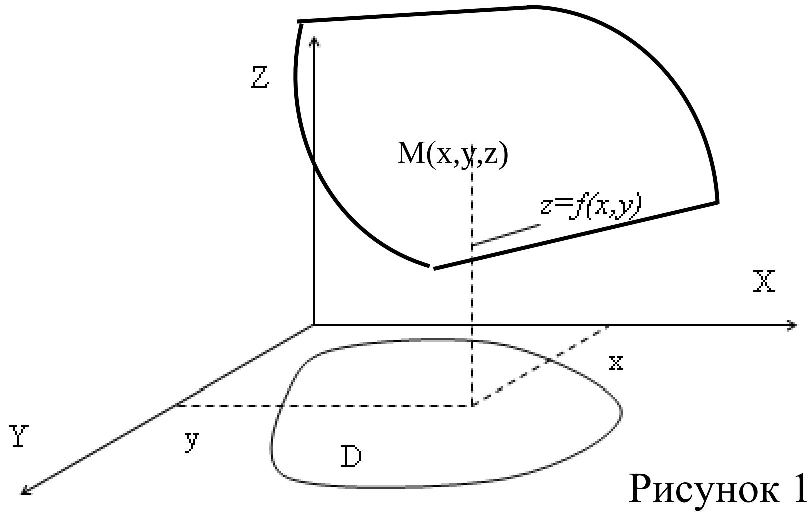


Рисунок 13

Решение.

а) Данная функция определена на всей плоскости *XOY*, следовательно, *D(Z)={XOY}*.

б) Данная функция определена, если $x+y-1\neq 0$. Областью определения являются точки, не лежащие на прямой $x+y=1$ (рисунок 12).

в) Данная функция определена, если $4-x^2-y^2\geq 0$ или $x^2+y^2\leq 4$.

Запишем неравенство в виде уравнения $x^2+y^2=4$ - граница области определения, которая на плоскости определяет окружность с центром в точке *O(0;0)* и радиусом *R*=2. Окружность делит всю плоскость *XOY* на внешнюю и внутреннюю ее части. Для определения какая часть является областью определения возьмем любую точку, например *O(0;0)* и подставим в неравенство $4-x^2-y^2\geq 0$. Получим $4-0-0\geq 0 \Rightarrow 4\geq 0$- истинно.

Точка *O(0;0)* принадлежит внутренней части окружности, следовательно областью определения данной функции является круг и его граница (рисунок 14).

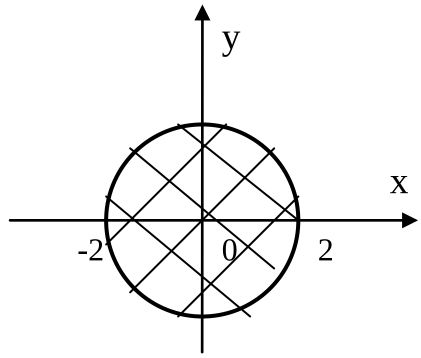


Рисунок 14

Замечание 1: если граница принадлежит области определения, то ее изображают сплошной линией, если нет то пунктирной. В нашем случае линия сплошная.

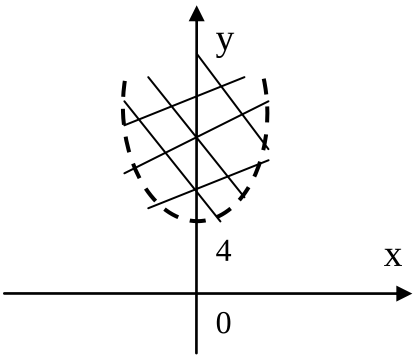


Рисунок 15.

г) Данная функция определена, если выражение под знаком логарифма положительно, т.е. $4-y+3x^2>0$ или $y<4+3x^2$. Таким образом границей области определения является парабола $y=4+3x^2$ с вершиной *(0,4)*, ветви вверх. Областью определения функции являются точки, лежащие внутри параболы (рисунок 15). Граница области принадлежит области определения.

Частные производные I и II порядка. Дифференциал функции двух переменных.

Определение 4.4. Частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной x называется предел отношения частного приращения функции по переменной *x* к приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x\to 0$.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}} \tag{4.1}$$

Таким образом, частной производной функции $z=f(x;y)$ по переменной x называется производная этой функции при постоянном значении переменной *y* (обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x).

Аналогично определяется частная производная функции по переменной *y*.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}} \tag{4.2}$$

Таким образом, частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной *y* называется производная этой функции при постоянном значении переменной *x* (обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y).

Определение 4.5. Полным дифференциалом функции $z = f(x;y)$ называется выражение вида:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy} \tag{4.3}$$

Для нахождения полного дифференциала в некоторой точке *M(x;y)*, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляют в этой точке, т.е.

$$\boxed{dz\Big|_{(x;y)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x;y)}dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x;y)}dy} \tag{4.4}$$

Пример 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = x^2 + xy + y^3 - 7$; б) $z = \sqrt{x + 4y}$; в) $z = \ln(x \cdot y^2) - e^{\frac{x}{y}}$.

Решение.

а) $z = x^2 + xy + y^3 - 7$

Считая *y* постоянным, получим: $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = 2x + 1 \cdot y + 0 = 2x + y$

Считая *x* постоянным, получим: $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = x \cdot 1 + 3y^2 - 0 = x + 3y^2$.

б) $z = \sqrt{x + 4y}$ - функция сложная.

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = \frac{1}{2\sqrt{x+4y}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+4y}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = \frac{1}{2\sqrt{x+4y}} \cdot 4 = \frac{4}{2\sqrt{x+4y}}$.

в) $z = \ln(x \cdot y^2) - e^{\frac{x}{y}}$ - сумма двух сложных функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = \frac{1}{x \cdot y^2} \cdot 1 \cdot y^2 - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \cdot e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = \frac{1}{x \cdot y^2} \cdot x \cdot 2y \ - e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{x}{y}}.$$

Пример 3. Вычислить полный дифференциал функции $z = x^4 - 2x^2y^2 + y$ в точке *M(1;2)*.

Решение.

Для нахождения полного дифференциала функции $z = x^4 - 2x^2y^2 + y$ в точке *M(1;2)*, воспользуемся формулой (4.3). Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = 4x^3 - 4xy^2; \ \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = -4x^2y + 1$$

Вычислим значения частных производных в точке *M(1;2)*:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;2).} = 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 \cdot 2^2 = -12 \ ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;2)} = -4 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1 = -7 \cdot$$

Согласно формуле (4. 4), получим: $dz = -12dx - 7dy$.

Частные производные II порядка.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ являются функциями переменных *x* и *y*. Поэтому от них можно находить частные производные, которые называются частными производными II порядка.

Частных производных II порядка от функции двух переменных четыре, они находятся и обозначаются следующим образом:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}$ - здесь *z* дифференцируется два раза по *x*;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$ - здесь *z* дифференцируется два раза по *y*;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = z''_{xy}$ - здесь z дифференцируется сначала по x, а потом результат дифференцируют по y.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x} = z''_{yx}$ - здесь z дифференцируется сначала по y, а потом результат дифференцируют по x.

Пример 4. Вычислить частные производные второго порядка от функции $z = x^4 \cdot y + e^x \cdot y^2$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = 4x^3 y + e^x \cdot y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = x^4 + 2e^x \cdot y\ .$$

Последовательно найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3 y + e^x y^2\right)'_x = 12x^2 y + e^x y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^4 + 2e^x y\right)'_y = 2e^x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \left(4x^3 + e^x y^2\right)'_y = 4x^3 + 2e^x y; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x^4 + 2e^x\right)'_x = 4x^3 + 2e^x y\ .$$

Из примера видно, что смешанные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}$ равны.

Справедлива следующая теорема: если функция $z = f(x;y)$ и её частные производные определены и непрерывны в точке *M(x;y)* и в некоторой её окрестности, то в этой точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}.$$

<u>Экстремум функции двух переменных.</u>

Определение 4.5. Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;y_0)$. Говорят, что функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $(x_0;y_0)$ максимум (минимум), если для всех точек $(x;y)$, достаточно близких к $(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ ($f(x;y) > f(x_0;y_0)$). Тогда точка *(x_0;y_0)* называется точкой ***максимума (минимума).***

Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Для исследования функции $z = f(x;y)$ на экстремум, необходимо выполнить следующие действия:

1) Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять их к нулю и решить систему уравнений: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$.

Каждая пара действительных корней этой системы определяет одну стационарную точку исследуемой функции.

Пусть $P_0(x_0;y_0)$ - одна из стационарных точек.

2) Найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислим их значения в каждой стационарной точке.

Положим, что: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\Big|_{P_0}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$.

3)Составить и вычислить дискриминант: $D = AC - B^2$.

Если в исследуемой стационарной точке $P_0(x_0;y_0)$:

1. $D > 0$, то функция $z = f(x;y)$ в этой точке имеет экстремум, причем если $A > 0$ минимум, при $A < 0$ максимум.
2. $D < 0$, то в исследуемой точке экстремума нет.
3. $D = 0$, то вопрос об экстремуме требует дополнительного исследования.

4) Вычислить значение функции в точке экстремума.

Пример 5. Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$, исследовать данную функцию на экстремум.

Решение.

Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию на экстремум необходимо выполнить следующие действия:

1) Найдем частные производные первого порядка, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять к нулю и решить систему уравнений, решением которой являются стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y \cdot$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Следовательно, заданная функция имеет только одну стационарную точку *P(4,-2)*.

2) Найдем частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 \ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных *x* и *y*, следовательно, постоянны в любой точке. Поэтому для точки *P(4,-2)* имеем

A=-2;B=-1;C=-2.

Составим и вычислим дискриминант:

$D = AC - B^2 = (-2) \cdot (-2) - (-1)^2 = 3$

Для данной функции $D > 0$ и *A<0*, следовательно, в точке *P(4,-2)* имеем максимум.

д) Найдем значение функции:

$$z_{\max} = z(4;-2) = -(4^2) - 4 \cdot (-2) - (-2)^2 + 6 \cdot 4 - 4 = 8.$$

Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение функции двух переменных, её области определения. График функции двух переменных.
2. Определение частной производной первого порядка функции двух переменных по любому из независимых

переменных. Сформулируйте правила нахождения частных производных первого порядка.

3. Определение полного дифференциала и полного приращения функции двух переменных?

4. Дайте определение частных производных второго порядка и сформулируйте правила их нахождения и теорему о равенстве смешанных производных.

5. Дайте определение точек максимума и минимума для функции двух переменных. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точек экстремума для функции двух переменных.

6. Сформулируйте правило нахождения точек экстремума для функции двух переменных.

4.2. Задания для самостоятельного решения.

<u>Контрольная работа работа №2 по теме: «Функция двух переменных»</u>

Задание№1 – найти область определения функции $z = f(x;y)$.

Задание№2. – дана функция $z = f(x;y)$. Найти:

а) полный дифференциал в точке P;

б) частные производные второго порядка.

Задание №3 – Найти экстремум указанной функции.

№	**Номера заданий**		
	1	**2**	**3**
1.	$z=\frac{1}{x-2y}$	а) $z=x^2+3xy-y^3+2$ б) $z=\sqrt{x}+3x^4y-y^4$ *P(1;3)*	$z=x^2+4y^2+1$
2.	$z=\frac{1}{2x-y}$	а) $z=x^3+2xy-y^2+1$ б) $z=tgx\ +x^2y+\sin y\ -1$ *P(0;0)*	$z=x^2+xy\ -1$
3.	$z=\frac{3}{3x-2y}$	а) $z=2x^2-xy-y^3-7$ б) $z=e^x-3xy^2+\frac{1}{4}y^4+7$ *P(0;2)*	$z=x^2+xy\ -4$

4.	$z=\dfrac{1}{x+y-7}$	а) $z=x^4+xy^2+2y\ \ +3$ б) $z=y\cos x\ \ +x^5y-y^3-8$ *P(0;3)*	$z=-x^2+2xy\ \ +10$
5.	$z=\sqrt{x-y}$	а) $z=3x^3+2xy^2-y^4+5$ б) $z=y\ln x\ \ -8x^2y^2+\dfrac{1}{y}$ *P(1;-2)*	$z=x^2+2y^2-5$
6.	$z=\sqrt{2x-y-1}$	а) $z=x^2+3xy-y^3+2$ б) $z=x^3/3+4xy^2-3\sqrt{x}y^3$ *P(1;-2)*	$z=x^2+xy\ \ +y^2-2x-y$
7.	$z=\sqrt{x-2y+3}$	а) $z=-4x^3+10xy-16y-8$ б) $z=ye^{3x}+9x^2y\ \ -4y^4$ *P(0;-1)*	$z=x^2+xy\ \ +y^2-2x-y$
8.	$z=\dfrac{6}{5x+y-3}$	а) $z=-5xy^3-8x^2+7y$ б) $z=y^2\sin x\ \ +x^5y-4y^3x^2-8$ *P(0;3)*	$z=x^2-9xy\ \ +y^2+2$
9.	$z=\lg\left(x^2-y\right)$	а) $z=\sqrt{x}+3x^4y-y^4$ б) $z=\ln x\ \ -8x^2y^2+\dfrac{x}{y}+4x-3$ *P(1;-1)*	$z=3-2x^2-xy\ \ -y^2$
10.	$z=\ln\left(2x\ \ -y\right)$	а) $z=x^3/3+4xy^2-3y^3$ б) $z=tgx\ \ +x^2y+x\sin y\ \ -1$ *P(0;0)*	$z=x^2+2xy\ \ -y^2+4x$
11.	$z=\dfrac{3}{-x-2y}$	а) $z=2x^2y^2+2cosy\ \ -3xy+6$ б) $z=2y^3e^x-3xy^2+\dfrac{1}{4}y^4x+7y$ *P(0;2)*	$z=x^2-3xy\ \ +y^2+8$
12.	$z=\ln\left(2x^2-y\right)$	а) $z=e^x-3xy^2+4x^2y^4+7$ б) $z=4x\ \ y^3+3x^2y+x^2\sin y\ \ -1$ *P(0;2)*	$z=x^2+5x-y^2+4y$
13.	$z=\dfrac{3}{\sqrt{x-3y}}$	а) $z=\cos x\ \ +x^5y-y^3-8$ б) $z=ye^{5x}+4x^2y\ \ -4y^4-2x$ *P(0;3)*	$z=3x^2+2y^2-xy$
14.	$z=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+y}}$	а) $z=4e^x-3x^2y^2+4x^3y^4+7$ б) $z=2\sqrt{x+1}+3x^3y+x^2\sin y\ \ -1$ *P(0;0)*	$z=x^2+2xy\ \ +3y^2$

15.	$z=x+\frac{1}{\sqrt{y}}$	а) $z=2e^{x}-5x^{2}y^{7}+x^{3}y^{4}+2$ б) $z=3\sqrt{x+2}+3x^{3}y^{5}+x^{2}\sin y\ \ -3x$ *P(-1;0)*	$z=3x^{2}-xy\ \ +x+y$
16.	$z=\sqrt{6x}+\frac{2}{\sqrt{y}}$	а) $z=2x\ \ y+3x^{2}y+\sin y\ \ -1$ б) $z=e^{3x+y}+9x^{2}y\ \ -4y^{4}$ *P(0;0)*	$z=-x^{2}+xy\ \ -2y^{2}+x+y$
17.	$z=\frac{3}{x^{2}+y^{2}-1}$	а) $z=\ln x\ \ +x^{2}y+x\cos y\ \ -2y$ б) $z=\sqrt{x+2y}-3x\ \ y^{2}+7x$ *P(1;2)*	$z=3x^{2}+3xy+y^{2}-6x-2y$
18.	$z=\ln\left(x^{2}+y^{2}-25\right)$	а) $z=2x\ \ y^{3}+x^{2}y+y\sin x\ \ -5x$ б) $z=\ln(x^{2}+y)-6x^{5}y^{2}-9$ *P(-1;0)*	$z=-x^{2}+3xy-4y^{2}+4x-6y$
19.	$z=\sqrt{36-x^{2}-y^{2}}$	а) $z=3x^{4}y^{2}+x^{5}y+y\cos x-2y$ б) $z=e^{xy}+\cos x+\sqrt{y}$ *P(0;1)*	$z=x^{2}+2xy-y^{2}+6x-10y$
20.	$z=\frac{3}{\sqrt{x^{2}+4y^{2}-4}}$	а) $z=7x^{2}y^{5}-x^{3}y+x\cos y-2x$ б) $z=3^{x/y}+y^{3}-4x^{4}y$ *P(0;3)*	$z=3x^{2}+5xy+3y^{2}+x-y$
21*.	$z=\frac{3}{\sqrt{x^{2}+y^{2}-16}}+$ $+\frac{5}{\sqrt{y}}$	а) $z=2y^{3}e^{5x}-2x^{2}y\ \ -4y^{4}-5x$ б) $z=\sin^{2}(3x+4y)+\sqrt{x}$ *P(1;0)*	$z=-x^{3}-y^{2}+81x+4y$
22*.	$z=\frac{\ln(x^{2}-y)}{\sqrt{y-x}}$	а) $z=2x^{3}e^{3y}-2x^{2}y^{6}-4x^{4}-5y$ б) $z=\cos^{2}(2x-2y)-\ln y$ *P(1;1)*	$z=x^{3}-3xy+y^{3}+10$
23*	$z=\sqrt{y^{2}+x^{2}-9}+$ $+\sqrt{16-x^{2}-y^{2}}$	а) $z=2x^{2}y^{6}-3x^{3}y+y\cos 2x-\frac{1}{8}$ б) $z=\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}+e^{x}$ *P(0;1)*	$z=x^{3}-6xy+2y^{3}+9$
24*	$z=\lg(x^{2}-y)+$ $+\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}$	а) $z=\frac{1}{5}x^{5}y^{3}+x^{2}y+y\sin 3x\ \ -2x$	$z=2x^{3}-xy+y^{2}+5x^{2}$

		б) $z = e^{\sin(x+y)} + \frac{1}{\sqrt{y}}$ *P(-1;1)*	
25*	$z = \frac{\ln(x^2+y)}{\sqrt{y-x-1}}$	а) $z = 2x\ y^6 + 3x^2 y + x^4 \sin 5y\ - 3x$ б) $z = arctg\frac{y}{x} - \ln x$ *P(1;1)*	$z = x^3 - 6xy\ + 2y^3 + 9$

4.3. Итоговый тест.

1. Областью определения функции двух переменных $z = f(x;y)$является:

1. множество значений *x*, при которых функция имеет смысл;
2. называется совокупность точек *(x;y)*, в которых данная функция принимает действительные значения;
3. множество значений *y*, при которых функция имеет смысл;
4. множество значений *z*, в которых функция определена.

2. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$ от функции двух переменных $z = f(x;y)$находится следующим образом:

1. *z* дифференцируется два раза по *x*;
2. *z* дифференцируется два раза по *y*;
3. *z* дифференцируется сначала по *y*, а потом результат дифференцируют по *x*;
4. *z* дифференцируется сначала по *x*, а потом результат дифференцируют по *y*;

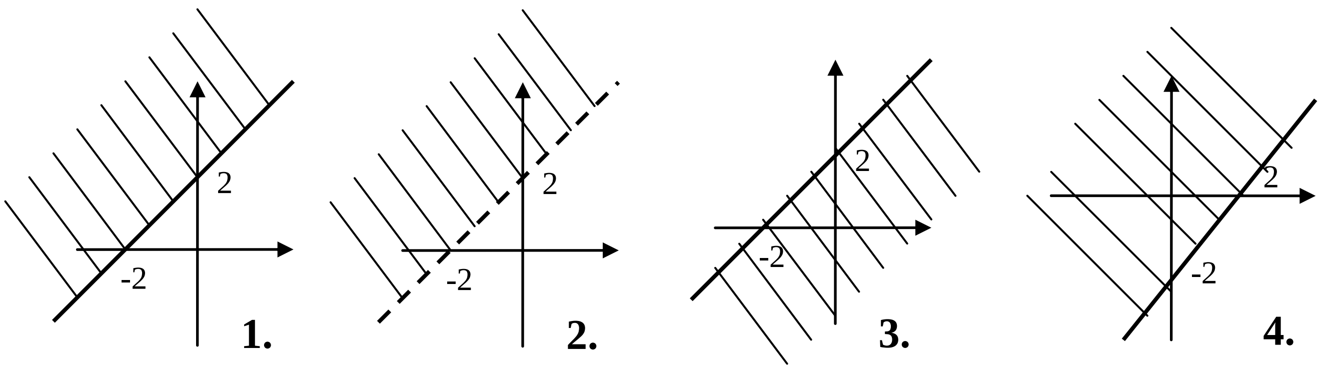
3. Согласно необходимому признаку существования точек экстремума, стационарной точкой для функции двух переменных $z = x^2 + y^2 - x$ является точка:

1. *O(0;0)*; **2.** *M(1/2;1/2)*; **3.** *M(1;1)* **4.** *M(1/2;0)*.

4. Если $D = AC - B^2$, где $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}\Big|_{P_0}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$, то точка $P_0(x_0;y_0)$ является точкой минимума при условии:

1. $D > 0,\ A > 0$; **2.** $D > 0,\ A < 0$; **3.** $D = 0$; **4.** $D < 0$.

5. ***Областью определения функции*** $z=\sqrt{y-x-2}$ ***является следующее геометрическое множество точек:***



6. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ ***от функции*** $z=4x^2-3xy^2+4y^3+6x$ ***равна:***

1.$3y^2+6$**; 2.** $8x-6xy+12y^2+6$**; 3.** $-6xy+12y^2$**; 4.** $8x-3y^2+6$**.**

7.Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ ***от функции*** $z=4x^2-3xy^2+4y^3+6x$ ***равна:***

1. $3y^2+6$**; 2.** $8x-6xy+12y^2+6$**; 3.** $-6xy+12y^2$**; 4.** $8x-3y^2+6$**.**

8. Полный дифференциал функций $z=f(x;y)$ ***равен:***

1. $dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$; **2.** $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$;

3. $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx\cdot\frac{\partial z}{\partial y}dy$; **4.** $dz=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

9. Дифференциал функции $z=x^y$ ***вычисляют по формуле:***

1. $dz=yx^y\Delta x+x\ln x\Delta y$; **2.** $dz=x^{y-1}\Delta x+x^{y-1}\Delta y$;

3. $dz=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y$; **4.** $dz=yx\Delta x+x\ln x\Delta y$.

10. Частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ***;*** $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***от функции*** $z=5x^2y-4y^2+7xy-2xy^3+x-6y+2$ ***соответственно равны:***

1. $10-6y^2;\ -8-12xy$; **2.** $10-6y^2;\ 7-12xy$;

3. $10y;\ -8-12xy$; **4.** $10x+7-6y^2;\ 10x+7-6y^2$

11. Дана функция двух переменных $z=\sqrt{2x^3+y^2}$**. *Установить соответствие между частными производными и их выражениями для этой функции.***

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$	а) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3+y^2}}$
2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$	б) $\dfrac{1}{2\sqrt{6x^2+2y}}$
	в) $\dfrac{x^2}{\sqrt{6x^2+2y}}$
	г) $\dfrac{y}{\sqrt{2x^3+y^2}}$

12.Частная производная $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ***от функции***

$z=2y^2+x\ln y-y^3\cos x+8xy-x$ равна:

1. $4y+\dfrac{x}{y}+2y\sin x+8y-2x$; **2.** $y^2\cos x-2$;

3. $\dfrac{1}{y}+2y\sin x+8$; **4.** $4-\dfrac{x}{y^2}-2\cos x$.

13. Если точка $P_0(x_0;y_0)$ ***является стационарной точкой, то согласно достаточному признаку существования экстремума функции двух переменных дискриминант в этой точке вычисляется по формуле:*** $D=AC-B^2$***, тогда параметры A,B,C вычисляются следующим образом:***

1. $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$; $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}\Big|_{P_0}$; $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$;

2. $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$; $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}\Big|_{P_0}$; $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$;

3. $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$; $B=\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}\Big|_{P_0}$; $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$;

4. $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{P_0}$; $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}\Big|_{P_0}$; $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{P_0}$

14. Экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$ ***является:***

1. $z_{\max}=9$**;** **2.** $z_{\min}=-54$**;** **3.** $z_{\min}=-7$**;** **4.** $z_{\max}=5$.

Глава 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

5.1. Необходимый теоретический минимум и примеры решения типовых заданий.

Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения I порядка.

Определение 5.1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производные различных порядков(или дифференциалы) этой функции.

В общем виде обозначается:

$$\boxed{F(x,y,y',y''....y^{(n)})=0} \tag{5.1}$$

Примеры: а) $x^2\sin y=y'\cos x$; б) $y''+3y'-5=0$; в) $y'''=4x^3$.

Определение 5.2. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

В примере имеем уравнения следующих порядков:

а) первого; б) второго; в) третьего.

Определение 5.3. Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение (5.1) обращает его в тождество.

Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка, **т.**е. уравнение вида:

$$\boxed{F(x,y,y')=0} \qquad (5.2)$$

или $y' = f(x,y)$.

Примеры: $y' = 2x^2 + y$; $(x+1)dx = \ln y dy$.

Определение 5.4. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$ называется функция $y=\varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами:

а) является решением данного уравнения при любых значениях С;

б) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ существует единственное значение, $c=c_0$ при котором решение $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Определение 5.5. Всякое решение, $y=\varphi(x,c_0)$,полученное из общего решения $y=\varphi(x,c)$ при определенном значении $c=c_0$ называется частным решением.

Определение 5.6. Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

<u>Типы дифференциальных уравнений первого порядка.</u>

1. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.*

Уравнения вида:

$$\boxed{f_1(x)\varphi_1(x)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0} \qquad (5.3)$$

или $y' = f(x)\varphi(y)$ называется уравнение ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.***

В результате деления исходного уравнения (5.3) на $f_2(x)\varphi_1(y)$, получим уравнение вида: $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \dfrac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения

$\displaystyle\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = c$, которое и определяет решение исходного уравнения.

Замечание: если в решении функция *y* выражена явно ($y=\varphi(x,c)$), то имеем общее решение; если функция *y* выражена неявно ($\Phi(x,y,c)=0$), то имеем общий интеграл.

Пример 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения $\cos^2 y dx = e^{-2x} dy$.

Решение.

Разделим обе части на $\cos^2 y e^{-2x}$, получим: $\dfrac{dx}{e^{-2x}} = \dfrac{dy}{\cos^2 y}$.

Проинтегрируем обе части уравнения: $\int e^{2x} dx = \int \dfrac{dy}{\cos^2 y}$, получим $\dfrac{1}{2}e^{2x} = tgy + c$ - общий интеграл.

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y' - \dfrac{2}{x+1}y = 0$ при заданных начальных условиях $y(3)=1$.

Решение.

$y' - \dfrac{2}{x+1}y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{2}{x+1}y$, выразим производную через дифференциалы переменных $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx, получим;

$dy = \dfrac{2}{x+1}ydx$, далее разделим переменные: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2}{x+1}dx$.

Интегрируем обе части: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln|c|$, для упрощенного представления общего решения постоянную *C* выразили через $\ln|c|$. Применяя свойства логарифмов упростим полученную функцию

$\ln|y| = \ln(|x+1|^2 \cdot c) \Rightarrow y = (x+1)^2 \cdot c$ - общее решение.

Найдем частное решение, для этого подставим в общее решение начальные условия $y(3)=1$, получим: $1 = (3+1)^2 \cdot c \Rightarrow c = \dfrac{1}{16}$. Поставляя полученное значение *C* в общее решение, найдем $y = \dfrac{1}{16}(x+1)^2$ - частное решение.

2. *Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.*

Уравнение вида:

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}, \qquad (5.4)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ известные функции от *x*, называется линейным.

Будем искать решение уравнения (5.4) в виде произведения двух функций $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Подставим эти выражения в уравнение:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x)uv = Q(x) \Rightarrow u' \cdot v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Полученное уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными: $\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \quad (1) \\ u' \cdot v = Q(x) \quad (2) \end{cases}$.

Решая уравнение (1), найдем функцию v и подставив её в уравнение (2), выразим функцию u. Решение системы позволит записать решение исходного уравнения: $y = u \cdot v$.

Пример 3.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка.

$$y' - yctgx = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, т.е. уравнением вида: $y' + P(x)y = Q(x)$

Для решений уравнений положим: $y = u \cdot v$, где *u, v* – независимые функции от *x,* $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение в нашем случае будем иметь:

$$u'v + uv' - uv \cdot ctgx = \frac{1}{\sin x} \text{ или } (u' - uctgx) \cdot v + uv' = \frac{1}{\sin x}$$

Подберем функцию $u = u(x)$ так, чтобы выражение в скобке, обращалось в нуль. Для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} u' - uctgx = 0 \quad (1) \\ uv' = \dfrac{1}{\sin x} \quad (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) системы определяем функцию $u(x)$, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' - uctgx = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u \cdot ctgx \Rightarrow \frac{du}{u} = ctgx \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow$$

$$\ln u = \ln \sin x \Rightarrow u = \sin x$$

Для определения функции $v(x)$, найденное значение функции $u(x)$ подставляем в уравнение(2) системы, получим:

$$\sin x\cdot v'=\frac{1}{\sin x}\Rightarrow\quad v'=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow v=-ctgx+c$$

Записываем общее решение данного уравнения в виде $y=u\cdot v$ или

$$y=\sin x(-ctgx+c)\Rightarrow y=\sin x\left(-\frac{\cos x}{\sin x}+c\right)\Rightarrow$$

$y=-\cos x+c\sin x$ - общее решение.

Дифференциальные уравнения II порядка.

Определение 5.7. Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида:

$$\boxed{F(x,y,y',y'')=0} \tag{5.5}$$

или

$$\boxed{y''=f(x,y,y')}. \tag{5.6}$$

В основном будем рассматривать уравнение вида (5.6).

Определение 5.8. Общим решением дифференциального уравнения (5.6) называется функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$, где $c_1 u c_2$ - произвольные постоянные, обладающая следующими свойствами:

а) является решением данного уравнения при любых значениях $c_1 u c_2$;

б) для любых начальных условий: $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$ существуют единственные значения постоянных $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$, такие, что функция $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$ является решением уравнения (5.6) и удовлетворяет начальным условиям.

Определение 5. 9. Всякое решение $y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)$, полученное из общего решения $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ при определенных значениях $c_1=c_1^0$, $c_2=c_2^0$ называется ***частным решением*** уравнения (5.6).

Определение 5.10. Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения (5.6) удовлетворяющее начальным условиям, $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$, называется задачей Коши.

Дифференциальные уравнения II порядка, допускающие понижения порядка.

Одним из методов интегрирования уравнения (5.6) является метод понижения порядка. Суть метода состоит в том, что с помощью подстановки данное уравнение сводится к уравнению на порядок ниже.

Рассмотрим два типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1) Пусть дано уравнение:

$$\boxed{y'' = f(x)} \tag{5.7}$$

Порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения (5.7).

Интегрируя уравнение $y'' = f(x)$, получаем: $y' = \int f(x)dx$ или $y' = \varphi_1(x) + C_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение, находим $y = \int (\varphi_1(x) + c_1)dx$ или получим: $y = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2$ - общее уравнение.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' = x^2 - 3x + 1$

Решение. Последовательно интегрируя два раза данное уравнение, получим:

$$y' = \int (x^2 - 3x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$y = \int (\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + c_1)dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

2) Пусть дано уравнение:

$$\boxed{y'' = f(x; y')} \tag{5.8}$$

Обозначим: $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$. В результате из уравнения (5.8) получим уравнение первого порядка $p' = f(x, p)$. Решив его, найдем функцию $p = \varphi(x, c_1)$.

Заменяя функцию p на y', получаем дифференциальное уравнение $y' = \varphi(x, c_1)$, которое имеет вид (5.7).Проинтегрировав его, получим общее решение уравнения (5.8).

Пример 5.

Решить дифференциальные уравнения второго порядка: $\left(x^3 + 1\right) \cdot y'' = 3x^2 \cdot y'$

Решение.

Данное дифференциальное уравнение допускает понижение порядка, не содержит явно функцию *y*.

Положим $y' = p$, тогда $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$ и уравнение примет вид

$$\left(x^3 + 1\right) \cdot \frac{dp}{dx} = 3x^2 \cdot p$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, разделим переменные и проинтегрируем обе части

$$\frac{dp}{p} = \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx,$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx,$$

$$\ln|p| = \ln\left|x^3 + 1\right| + \ln|c_1|,$$

где интеграл, стоящий в правой части решаем подстановкой $t = x^3 + 1$ и приводим к табличному $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$.

Применяя свойство логарифма, получим:

$$\ln|p| = \ln\left|(x^3 + 1) \cdot c_1\right| \Rightarrow p = c_1 \cdot \left(x^3 + 1\right).$$

Возвращаясь к подстановке, получим:

$$y' = c_1 \cdot \left(x^3 + 1\right) \Rightarrow dy = c_1 \cdot \left(x^3 + 1\right) dx \Rightarrow \int dy = c_1 \int \left(x^3 + 1\right) dx,$$

тогда $y = c_1 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x + c_2 \right)$ - общее решение.

Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Однородные уравнения.

Определение 5.11. Уравнение вида:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0} \qquad (5.9)$$

называется ***линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами,*** где p,q – числа.

Одним из свойств линейных уравнений является то, что общее решение таких уравнений можно найти по их известным частным решениям.

Теорема. Если y_1 и y_2 - линейно-независимые частные решения уравнения (4), то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ есть общее решение этого уравнения (C_1 и C_2 - постоянные величины).

Таблица 3.

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	**Общее решения**
1. $D > 0 \quad k_1 \neq k_2$ - действительные различные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $D = 0 \quad k_1 = k_2$ - действительные равные корни.	$y = C_1 e^{k_2 x} + C_2 x e^{k_2 x} = e^{k_2 x}(C_1 + C_2 x)$
3. $D < 0 \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = \alpha + \beta \cdot i \\ k_2 = \alpha - \beta \cdot i \end{array}\right.$ - комплексные сопряженные.	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Общее решение уравнения (5.9) находится с помощью характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ и его вид зависит от характера корней этого уравнения, который определяем по таблице 3.

Пример 5.

а) Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$, которое имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k_1 = 4; \\ k_2 = 2. \end{array} \right.$

Тогда по таблице 3 (пункт 1), общее решение исходного уравнения этого дифференциального уравнения запишется в виде: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

б) Найти частное решение уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

Решение.

Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 16 = 0$ имеет два равных действительных корня $k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4 \Rightarrow k_1 = k_2 = 4$, поэтому общее решение уравнения по таблице 3 (пункт 2) имеет вид: $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

Для нахождения частного решения, найдем производную общего решения

$y = 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + 4C_2 x e^{4x} = e^{4x}(4C_1 + C_2 + 4C_2 x)$.

Подставляя начальные условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$ в выражения для y и y', получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 = \tilde{N}_1 e^0 + C_2 0 e^0 \\ 5 = e^0(4C_1 + C_2 + 4C_2 \cdot 0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} C_1 = 2 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -3 \end{array} \right. \cdot$$

Подставим решения системы в общее решение:

$y = e^{4x}(2 - 3x)$- частное решение.

в) Найти общее решение уравнения $y'' - 14y' + 50y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 14k + 50 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $D = 196 - 200 = -4 < 0$, следовательно, оно имеет два комплексных сопряженных корня :

$$k_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{4i^2}}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k_1 = 7 + i \\ k_2 = 7 - i \end{array} \right.,$$

где i – мнимая единица, $i^2 = -1, \alpha = 7, \beta = 1$.

Тогда по таблице 3 (пункт3) общее решение уравнения имеет вид: $y = e^{7x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Неоднородные уравнения.

Определение 5.12. Уравнение вида:

$$\boxed{y'' + py' + q = f(x)} \qquad (5.10)$$

называется ***линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами,*** где p,q – числа.

Общее решение (Y) этого уравнения состоит из суммы общего решения (y) соответствующего однородного уравнения $(y'' + py' + q = 0)$ и частного решения неоднородного уравнения $(\bar{y})$.

$$\boxed{Y = y + \bar{y}} \qquad (5.11)$$

Частное решение $(\bar{y})$ неоднородного уравнения находим по виду правой части уравнения.

Если $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ многочлен n-ой степени с определенными коэффициентами, то $(\bar{y})$определим по таблице 4.

Пример 6.

Найти общее решение линейных неоднородных уравнений:

а) $y'' + 12y' + 36y = 2x - 7$; б) $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$.

Решение.

а) $y'' + 12y' + 36y = 2x - 7$

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид: $Y = y + \bar{y}$, где

y - общее решение соответствующего линейного однородного;

$\overline{y}$ - частное решение линейного неоднородного.

1. Найдем y - общее решение уравнения однородного уравнения $y''+12y'+36y=0$, для этого составим характеристическое уравнение: $k^2+12k+36=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow k_1=k_2=-6$.

Корни действительные равные, следовательно (таблица 3, пункт 2.) общее решение линейного однородного уравнения имеет вид: $y=e^{-6x}(C_1+C_2x)$.

2.Найдем $\overline{y}$ по виду правой части уравнения, используя таблицу 4. В нашем примере $f(x)=2x-7$, при этом $\alpha=0$- не является корнем характеристического уравнения $(\alpha \neq k_1 \neq k_2)$, тогда по таблице 3(пункт 1), частное решение $\overline{y}$ будем искать в виде: $\overline{y}=x\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, получим многочлен: $\overline{y}=Ax+B$.

Таблица 4.

Пусть $Q_n(x)$- многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами, k_1, k_2 - корни характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$, тогда: 1) если α не совпадает с корнями характеристического уравнения$(\alpha \neq k_1\, и\;\; \alpha \neq k_2)$, то $\overline{y}=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$; 2) если α совпадает с одним из корней характеристического уравнения $(\alpha = k_1\, или\; \alpha = k_2)$, то $\overline{y}=x\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$; 3) если $\alpha=k_1=k_2$, то $\overline{y}=x^2\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$.

Найдем y' и $y'' \Rightarrow y'=A$и $y''=0$.

Подставим полученные выражения для $\overline{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$ в исходное уравнение $y''+12y'+36y=2x-7$, получим:

$0+12A+36(Ax+B)=2x-7 \Rightarrow 12A+36Ax+36B=2x-7$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. В результате получим систему уравнении, относительно A *и* B:

$$\begin{cases} 36A = 2 \\ 12A + 36B = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{18} \\ B = -\dfrac{23}{108} \end{cases}$$. Подставим полученные значения в частное решение $\bar{y} = Ax + B$, в результате получим: $\bar{y} = \frac{1}{18}x - \frac{23}{108}$.

3) Поставим полученные решения $y, \bar{y}$ в уравнение $Y = y + \bar{y}$.

$Y = e^{-6x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{18}x - \frac{23}{108}$ - общее решение неоднородного линейного уравнения.

б) $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$.

Решение.

1.Найдем y - общее решение уравнения однородного уравнения $y'' - y' - 6y = 0$, для этого составим характеристическое уравнение:

$k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow D = 25 \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 3.$

Корни действительные различные, следовательно (таблица 3, пункт 1) общее решение линейного однородного имеет вид: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$.

2. Найдем $\bar{y}$ по виду правой части уравнения, используя таблицу 4.

В нашем примере $f(x) = 10e^{3x}$, при этом $\alpha = 3$- совпадает с одним из корней характеристического уравнения$(\alpha = k_2 = 3)$, тогда по таблице 4(пункт 2), частное решение $\bar{y}$ будем искать в виде $\bar{y} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получим выражение:

$\bar{y} = xAe^{3x}$. Найдем $\overline{y'}$ и $\overline{y''}$:

$$\bar{y}' = \left(xA \cdot e^{3x}\right)' = A\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right) = Ae^{3x} + A \cdot 3 \cdot x \cdot e^{3x}$$

$$\bar{y}'' = 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

Подставим полученные выражения: $\overline{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$ в исходное уравнение $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$, получим:

$$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - Ae^{3x} - 6Axe^{3x} = 10e^{3x} \Rightarrow 5Ae^{3x} = 10e^{3x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5A = 10 \Rightarrow A = 2$$

3) Поставим полученные решения $y, \overline{y}$ в уравнение $Y = y + \overline{y}$.

$Y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + 2x \cdot e^{3x}$ - общее решение неоднородного линейного уравнения.

Вопросы для самопроверки.

1. Какое уравнение называется дифференциальным?

Порядок дифференциального уравнения.

2. Что называется решением дифференциального уравнения? Какое решение дифференциального уравнения называется общим? Частным?

3. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка?

4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения.

5. Что называется дифференциальным уравнением второго порядка? Что называется его общим и частным решением?

6. Виды уравнений, допускающие понижения порядка. Методы их решения.

7. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод нахождения его общего решения.

8. Какова структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

9. Каким образом составляется характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и как оно составляется? Структура общего решения этого уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения.

10. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

11. Каким образом находится частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с

постоянными коэффициентами для правых частей в виде функции: $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ в зависимости от значения α и корней характеристического уравнения.

5.2. Задания для самостоятельного решения.

<u>Контрольная работа №4 по теме «Дифференциальные уравнения»</u>

Задание№1. Найти:

а) общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными;

б) частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

Задание№2. Найти:

а) общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижения порядка;

б) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$;

в) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

№	**Номера заданий**	
	1	**2**
1.	а) $xdy=ydx$; б) $y'+ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$ $y(0)=0$	а) $y''=-x^2+3$ б) $y''+4y'+4y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=3$ в) $y''-3y'+2y=x$
2.	а) $(x+1)dy=ydx$; б) $xy'-y=-x$ $y(1)=1$	а) $y''=4x^3-2$ б) $y''-5y'+6y=0$; $y(0)=6,\ y'(0)=-3$ в) $y''+4y=x+2$
3.	а) $(x+2)dy=(y+1)dx$;	а) $y''=5x^3-1$ б) $y''-2y'-3y=0$;

	б) $y' + y = e^{-x}$ $y(0) = 1$	$y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ в) $y'' + y = e^{x}$
4.	а) $x^2 dy = 2y dx$; б) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$ $y(1) = 2$	а) $y'' = 6x^2 - 7$ б) $y'' - 2y' - 8y = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 5$ в) $y'' - y = x - 1$
5.	а) $(x^2+1)dy = (y^2+1)dx$; б) $y' + ytgx = \dfrac{9}{\cos x}$ $y(0) = 0$	а) $y'' = -3x^2 - 4$ б) $y'' - y' = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$ в) $y'' - 2y' + y = 2x$
6.	а) $x^3 dy = (y+1)dx$; б) $y' + y = e^{x}$ $y(0) = -1$	а) $y'' = -2x^2 + x$ б) $y'' + 9y' = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ в) $y'' + 2y' + y = 4x$
7.	а) $(x^2+1)dy = (2y+1)dx$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = 3x \cdot 4^{x}$ $y(0) = 6$	а) $y'' = x^2 + 2x$ б) $y'' - 6y' = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ в) $y'' - 4y' + 4y = 5x$
8.	а) $(x+3)dy = 2\sqrt{y}dx$; б) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$ $y(0) = -3$	а) $y'' = -3x^2 - 2x - 1$ б) $y'' + 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ в) $y'' + 2y' = 2e^{x}$
9.	а) $\sqrt{1-x^2}dy = \sqrt{1-y^2}dx$; б) $xy' - 2y = x + 1$ $y(1) = 0$	а) $y'' = 9x^2 + x - 3$ б) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = -1,\ y'(0) = 4$ в) $y'' + 9y = x - 2$
10.	а) $dy = -ytgx \cdot dx$; б) $xy' + 2y = x^4$ $y(1) = 1$	а) $y'' = 9x^3 + x^2 - 1$ б) $y'' + y' = 0$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 7$ в) $y'' + y' - 6y = 5e^{x}$
11.	а) $(x+1)y' = y + 3$;	а) $y'' = 3x^4 + 2x^2 + x - 1$ б) $y'' + 2y' - 3y = 0$;

	б) $y'-\frac{2y}{x}=x^2\cdot e^x$ $y(1)=0$	$y(0)=0,\ y'(0)=1$ в) $y''-6y=x+1$
12.	а) $2yy'=tgx$; б) $y'-\frac{5y}{x}=x^5\cdot\sin 2x$ $y(0)=-2$	а) $y''=9x^3+x^2-1$ б) $y''-7y'+10y=0$; $y(0)=2,\ y'(0)=-1$ в) $y''+25y=3e^x$
13.	а) $(1-x)y'=y-1$; б) $y'+y\sin x=e^{\cos x}$ $y(\frac{\pi}{2})=0$	а) $y''=2x^4+x^3-5$ б) $y''+2y'+y=0$; $y(0)=0,\ y'(0)=-5$ в) $y''-7y'=2e^x$
14.	а) $(x^2+1)y'=y+4$; б) $y'-2xy=\sin x\cdot e^{x^2}$ $y(0)=-2$	а) $y''=5x^4+2x^3-1$ б) $y''+8y'+16y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=0$ в) $y''-5y'=3e^x$
15.	а) $\cos x\cdot y'=y\cdot\sin x$; б) $y'-\frac{y}{x}=x\cdot\cos x$ $y(0)=-5$	а) $y''=\frac{1}{2}x^3+2x\ \ -1$ б) $y''-7y'+6y=0$; $y(0)=2,\ y'(0)=0$ в) $y''-5y'+6y=2x$
16.	а) $(x^2+1)y'=xy$; б) $xy'-3y=x+2$ $y(2)=2$	а) $y''=5x^2+2-1$ б) $y''+y=0$; $y(0)=-2,\ y'(0)=0$ в) $y''+4y'+3y=3x+1$
17.	а) $e^{3x}y'=y-3$; б) $y'-5x^4y=e^{x^5}$ $y(0)=7$	а) $y''=-3x^2+2\sin x-2x$ б) $y''-6y'=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=0$ в) $y''-6y'+9y=4e^x$
18.	а) $x^4y'=5-y$; б) $y'-\frac{3y}{x}=x^3\cdot\sin x$; $y(\frac{\pi}{2})=-8$	а) $y''=-4x^3-3\cos x-x+5$ б) $y''+2y'+5y=0$; $y(0)=-4,\ y'(0)=1$ в) $y''+9y=4x$

19.	а) $\cos^2 x\cdot y'=2y-1$; б) $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $y(0)=0$	а) $y''=-4x^4+5\sin 5x+\dfrac{1}{2}$ б) $y''+10y'+25y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=-1$ в) $y''+16y=4-x$
20.	а) $xyy'=3-2y$; б) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ $y(0)=0$	а) $y''=2x^3+2\cos 2x-x\ \ +6$ б) $y''+3y'-10y=0$; $y(0)=2,\ y'(0)=0$ в) $y''-4y'=6e^x$
21*.	а) $(y-x^2y)y'=xy^2+x$; б) $xy'+y=-x^2y^2$ $y(1)=1$	а) $xy''+y'=3x^4$ б) $y''+10y'+25y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=-1$ в) $y''+16y=-x$
22*.	а) $(y^2+1)\sqrt{1+x^2}\cdot y'=xy$; б) $xy'-y=x^2\sin 3x$ $y(0)=3$	а) $xy''-y'=e^x\cdot x^2$ б) $y''+6y'+13y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=1$ в) $y''+7y'=x+1$
23*.	а) $y(1-x^2)y'=x(1-y^2)$; б) $y'\sin^2 x+y=ctgx$ $y(\frac{\pi}{2})=1$	а) $2xy''-y'-x^2\ =0$ б) $y''-8y'+15y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=3$ в) $y''-8y=e^{-x}$
24*.	а) $y\sqrt{1+x^2}y'=\sqrt{1+y^2}\cdot x$; б) $y'+y\cos x=\sin x\cdot\cos x$ $y(0)=2$	а) $xy''-y'=4x^3$ б) $y''-4y'+17y=0$; $y(0)=-1,\ y'(0)=0$ в) $y''+7y'=e^{2x}$
25*.	а) $(y^2+y^2x)y'=x^2+yx^2$; б) $xy'-y=x^3\cdot\cos x$ $y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$	а) $y''=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{y'}{x}$ б) $y''-5y'-24y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=0$ в) $4y''+9y'=x+2$

Прикладные задачи сельскохозяйственного производства.

1. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Через 14 ч

после брожения масса фермента составила 6 г, а через 3ч–8 г. Найдите массу фермента до брожения.

2. Скорость распада некоторого лекарственного вещества пропорциональна его наличному количеству. В результате анализа установили, что через 1 ч после инъекции в организме осталось 31, 4 г лекарственного вещества, а по истечении 3 ч -9,7 г. Определите:
   1) Сколько граммов лекарственного вещества было введено в организм?
   2) Через сколько времени после введения в организме останется 1% первоначального количества лекарства?
3. Найдите закон роста палочковидных клеток с течением времени, если скорость роста клетки пропорциональна ее длине *l*, $\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l$ где $\alpha и \beta$ - параметры, характеризующие условия роста клеток; $l=l_0$ при $t=0$.

5.3. Итоговый тест.

1. Какие из следующих уравнении являются дифференциальными?

1) $x^2 + y^3 = 7 + x$; 2) $12y' + 36y = 2x$;

3) $y'' - \ln x + 3x^2 = \cos y$; 4) $z - 3y\cos x = x$.

2. Установить соответствие между приведенными дифференциальными уравнениями и их порядками :

1) $y''' = -y + x^2$	*а*) 1 *порядка*
2) $y' + yx^3 = \cos x$	*б*) 2 *порядка*
3) $2y^2 - y'' = 0$	*в*) 3 *порядка*.

3. Установить соответствие между приведенными дифференциальными уравнениями первого порядка и их типами:

1) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$	*а) с разделяющимися.*
2) $2y' + 3yx^2 = xe^x$	
3) $xy - x^2y - \sin x = 0$	*б) линейные.*
4) $y^2dx - (1-x)dy = 0$	

4. Частный интеграл уравнения $y'\cos y = x$ при заданных начальных условиях $y(1) = 0$ равен:

1. $\sin y = x^2 - 1$**; 2.** $\sin y = \dfrac{x^2}{2} - 1/2$**; 3.** $\sin y = \dfrac{x^2}{2} + 1/2$**; 4.** $-\sin y = \dfrac{x^2}{2} - 1/2$**.**

5. Решение линейного уравнения $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$ находят в виде: $y = uv$. Чему равна функция v?

1. x**; 2.** $\dfrac{1}{x}$**; 3.** $-x$**; 4.** $-\dfrac{1}{x}$**.**

6.Характеристическому уравнению $k^2 + 1 = 0$ соответствует дифференциальное уравнение:

1. $y'' + y' + 1 = 0$**; 2.** $y'' + y = 0$**; 3.** $y'' - y = 0$**; 4.** $y'' + y' = 0$**.**

7. Общее решение линейного однородного уравнения $y'' + 6y' + 8y = 0$ имеет вид:

1. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}$**; 2.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$**.**

3. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x}$**; 4.** $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-4x}$**.**

8. Частное решение линейного неоднородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 3x$ второго порядка имеет вид:

1. $x(Ax + B)$**; 2.** Ax^2**; 3.** $x^2(Ax + B)$**; 4.** $Ax + B$**.**

9. Какие из указанных уравнении первого порядка являются уравнениями с разделяющимися переменными:

а) $x^2y' = y(x+y)$; б) $(1-x^2)dy + xydx = 0$; в) $y' + y\cos x = 2x$;

г) $2xy' + y^2 = 1$; д) $-4x^2y + y' - 2x = 0$; е) $xy' = y\ln\dfrac{x}{y}$.

1. а), в); **2.** в), е); **3.** б), г); **4.** в), д).

10. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$ ***называется функция вида:***

1. $x = \varphi(c)$**; 2.** $y = \varphi(x,c)$**; 3.** $y = f(x,c)$**; 4.** $y = f'(x,c)$**.**

11. Общее решение уравнения первого порядка имеет вид: $y = -\frac{\cos^2 x}{2} + \sin x + C$. ***При заданных начальных условиях*** $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ ***постоянная*** C ***равна:***

1. $\frac{3}{2}$**;** **2.** $\frac{5}{2}$**;** **3.** 1; **4.** 0.

12. Общее решение дифференциального уравнения $y'(1-x) = y$ ***имеет вид:***

1. $y = \frac{C}{1-x}$**; 2.** $y = 1 - x + C$**; 3.** $y = -1 + x + C$**; 4.** $y = C(1-x)$**.**

13. Какие из указанных уравнении первого порядка являются линейными уравнениями:а) $x^2 y' = y(x+y)$***;б)*** $(1-x^2)dy + xydx = 0$;
в) $y' + y\cos x = 2x$; г) $2xy' + y^2 = 1$; д) $-4x^2 y + y' - 2x = 0$; е) $xy' = y\ln\frac{x}{y}$.

1. а), в); **2.** в), е); **3.** б), г); **4.** в), д).

14. Общее решение линейного уравнения $y' - \frac{y}{x} = x^2$ ***имеет вид:***

1. $y = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$**; 2.** $y = x(x+C)$**; 3.** $y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$**; 4.** $y = \frac{x^2}{2} + C$**.**

15.Для дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$ ***характеристическое уравнение имеет вид:***

1. $k^2 + 2k + 1 = 0$**; 2.** $k^2 + k = 0$**; 3.** $k^2 - k = 0$**; 4.** $k^2 + 1 = 0$**.**

16. Если характеристическое уравнение имеет корни $k_{1,2} = 3 \pm i$***, то общее решение линейного однородного уравнения имеет вид:***

1. $y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$**; 2.** $y = e^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$;

3. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$**;** **4.** $y = e^{3x}(C_1 \cos x - C_2 \sin x)$**.**

17. Частное решение линейного неоднородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(3x+1)$ ***второго порядка имеет вид:***

1. $xe^{2x}(Ax+B)$**; 2.** Ax^2e^{2x}**; 3.** $x^2e^{2x}(Ax+B)$**; 4.** $e^{2x}(Ax+B)$**.**

Литература.

1. *Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу/ Г.И.Архипов. В.А. Садовничий. В.И Чубариков. – М.: Дроф,.2003.*
2. *Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу/ И.А. Виноградова. С.Н. Олехник. В.А. Садовничий. - 3-е изд. испр. – М.: Дрофа, 2001.-Ч. 1.2.*
3. *Зайцев И.А. высшая математика/ И.А. Зайцев. - 3-е изд. испр. - М: Высшая школа, 2005.*
4. *Кудрявцев А.Д. Курс математического анализа/ А.Д. Кудрявцев. - 5-е изд. – М.: Дрофа, 2003.*
5. *Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике/ Д.Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2003.-Ч. 1,2.*

Содержание