ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Приморская государственная сельскохозяйственная академия»
Институт земледелия и агротехнологий

Кафедра физики и
высшей математики

Математика

Методические указания к практическим занятиям и
самостоятельной работе для студентов
направлений подготовки:
20.03.02– Природообустройство и водопользование,
21.03.02– Землеустройство и кадастры,
35.03.06–Агроинженерия

Часть 1

Уссурийск, 2016

УДК 517
Составитель: Савельева Е.В., канд. техн. наук, доцент кафедры физики и высшей математики, Тюрина Е.А. ст. преподаватель кафедры физики и высшей математики

Математика. Часть 1. Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для студентов направлений подготовки:20.03.02– Природообустройство и водопользование, 21.03.02 Землеустройство и кадастры, 35.03.06–Агроинженерия . /ФГБОУ ВО ПГСХА; сост.: Савельева Е.В., Е.А.Тюрина.- Уссурийск,2016.- 62 с.

Рецензент: И.В.Жуплей, к.э.н., доцент кафедры экономики и менеджмента филиала ДФУ г. Уссурийска

Печатается по решению методического совета ФГБОУ ВО «Приморская государственная сельскохозяйственная академия

Введение

Цели преподавания математики в высших сельскохозяйственных учебных заведениях: ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач сельскохозяйственного производства; развить логическое мышление и навыки математического исследования явлений и процессов, связанных с этим производством.

Методические указания предназначены для изучения одного из основных разделов математики «Математический анализ». Математический аппарат этого раздела широко применяются в различных отраслях естествознания и техники.

Основной задачей**,** которая решаются в ходе изучения раздела: подготовить студентов к приложению ряда важных математических понятий (таких как производная, интегрирование, дифференциальные уравнения и др.) к моделированию различных технических, технологических процессов.

Такую целенаправленность имеют настоящие методические указания, которые включают следующие разделы высшей математики:

1. введение в математический анализ;
2. дифференциальное исчисление функции одной переменной;
3. интегральное исчисление функции одной переменной;
4. дифференциальное исчисление функции двух переменных;
5. дифференциальные уравнения.
6. функция нескольких переменных.

Все указанные разделы содержат:

1. теоретические вопросы, типовые задачи с решениями, позволяющие подготовиться студентам к выполнению заданий для самостоятельного решения;
2. задания для самостоятельного решения: три контрольные работы, два типовых расчета (20 вариантов).

Методические рекомендации.

Задания для самостоятельной работы представлены в форме контрольных работ и типовых расчетов (по 20 вариантов).

Номера вариантов контрольных работ имеют полный перечень от 1 до 20.

Выбор заданий по номеру варианта в типовых расчетах производится по таблице:

№	*Задание№1*	*Задание№2*	*Задание№3*	*Задание№4*	*Задание№5*
1.	1	11	21	31	41
2.	2	12	22	32	42
3.	3	13	23	33	43
4.	4	14	24	34	44
5.	5	15	25	35	45
6.	6	16	26	36	46
7.	7	17	27	37	47
8.	8	18	28	38	48
9.	9	19	29	39	49
10.	10	20	30	40	50
11.	2	13	24	31	45
12.	4	15	21	32	46
13.	6	17	22	33	49
14.	8	11	30	34	42
15.	3	12	29	35	47
16.	5	14	28	36	43
17.	7	16	26	40	44
18.	9	18	25	37	50
19.	1	20	23	39	48
20.	10	19	27	28	41

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1 Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции? Что такое область определения функции?
2. Какие существуют способы заданий функции?
3. Что такое бесконечно малая и бесконечно большая величины? Какая существует связь между ними?
4. Сформулируйте определение предела функции.
5. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций,
6. Виды неопределенностей и правила их раскрытия.
7. Замечательные пределы.
8. Дайте определения непрерывности функции.
9. Условия непрерывности функции в точке.
10. Что такое точка разрыва? Классификация точек разрыва.

1.2. Задания для самостоятельного решения

Контрольная работа по теме:
«Предел функции, непрерывность функции»

Задание №1. Найти пределы следующих функций.

В-1

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ *при* $x_0=1; x_0=3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{4x}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}(1+4\alpha)^{\frac{5}{3a}}$

В-2

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x}{x^2+x-20}$ *при* $x_0=2; x_0=4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{8n}\right)^{4n}$

В-3

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ *при* $x_0=2; x_0=4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+4}-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 8x}$ г) $\lim\limits_{a\to 0}(1+2\alpha)^{\frac{1}{3a}}$

В-4

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 4}$ *при* $x_0 = 3; x_0 = 2; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sin 5x}$ г) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{8}{5n}\right)^n$

В-5

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$ *при* $x_0 = 1; x_0 = -2; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9-x} - 3}{2x}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 16x}{2x}$ г) $\lim\limits_{a \to 0} (1 + 7\alpha)^{\frac{1}{7a}}$

В-6

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$ *при* $x_0 = 0; x_0 = 3; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x}{\sin 8x}$ г) $\lim\limits_{a \to \infty} \left(1 + \dfrac{2a}{3}\right)^{\frac{4}{a}}$

В-7

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 5x + 6}$ *при* $x_0 = 2; x_0 = -3; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{2 - \sqrt{4 - x}}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x}{\sin 10x}$ г) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{7}{12n}\right)^n$

В-8

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1 - 2x + x^2}{1 - x^2}$ *при* $x_0 = 2; x_0 = 1; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{3 - \sqrt{8 + x}}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{6x}$ г) $\lim\limits_{a \to 0} \left(1 + \dfrac{3\alpha}{5}\right)^{\frac{2}{a}}$

В-9

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}$ *при* $x_0 = 0; x_0 = -2; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6 - x}}$ в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 2x}{5x}$ г) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{5n}\right)^{4n}$

В-10

а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ *при* $x_0 = 1; x_0 = -3; x_0 = \infty$

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 3x}{7x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{8n}\right)^{2n}$

В-11

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-16}{2x^2+6x-8}$ *при* $x_0=1; x_0=-4; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{7-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{7x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^{\frac{2x}{5}}$

В-12

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$ *при* $x_0=0; x_0=3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}{x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ 8x}{x/3}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{3n}\right)^{\frac{2n}{5}}$

В-13

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$ *при* $x_0=-1; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{\sin 3x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{2n}\right)^{\frac{7n}{3}}$

В-14

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$ *при* $x_0=0; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{\frac{7n}{5}}$

В-15

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$ *при* $x_0=-1; x_0=-5; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{tg4x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{7x}\right)^{\frac{3x}{2}}$

В-16

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$ *при* $x_0=1; x_0=-3; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3\sin 7x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n-7}\right)^{\frac{n}{2}}$

B-17

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$ *при* $x_0=0; x_0=1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{1-x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{x^2}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{3n}$

B-18

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-3x-10}{25-x^2}$ *при* $x_0=1; x_0=5; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 9x}{4x^2}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{n-5}\right)^{3n}$

B-19

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2+x-6}$ *при* $x_0=0; x_0=2; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 8x}{9x^2}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n+9}\right)^{\frac{n}{5}}$

B-20

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ *при* $x_0=-2; x_0=-1; x_0=\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{6x+1}-5}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x^2}{tg^2 2x}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n+4}\right)^{2n}$

Задание №2

Исследовать функцию на непрерывность. Сделать чертеж.

B-1 $y=\dfrac{x}{x-2}$	**B-2** $y=\dfrac{2x}{x+5}$	**B-3** $y=\dfrac{2x}{4-x}$
B-5 $y=7^{\frac{6}{2+x}}$	**B-6** $y=6^{\frac{2}{x-3}}$	**B-7** $y=5^{\frac{1}{x-3}}$
B-8 $f(x)=\begin{cases}x^2-4\cdot при\cdot x<1\\ 4-2x\cdot при\cdot x\ge 1\end{cases}$	**B-9** $f(x)=\begin{cases}x^2+1\cdot при\cdot x\le 2\\ 4-x\cdot при\cdot x>2\end{cases}$	**B-10** $f(x)=\begin{cases}x+8\cdot при\cdot x<-2\\ x^2-3\cdot при\cdot x\ge -2\end{cases}$

B-11 $f(x)=\begin{cases}x+5\cdot при\cdot x\le -1\\ 2-x^2\cdot при\cdot x>-1\end{cases}$	**B-12** $f(x)=\begin{cases}4-x^2\cdot при\cdot x<3\\ x-2\cdot при\cdot x\ge 3\end{cases}$	**B-13** $f(x)=\begin{cases}5-x\cdot при\cdot x\le -1\\ x^2+3\cdot при\cdot x>-1\end{cases}$
B-14 $f(x)=\begin{cases}x^2-4\cdot при\cdot x<2\\ 3-x\cdot при\cdot x\ge 2\end{cases}$	**B-15** $f(x)=\begin{cases}x+6\cdot при\cdot x\le -2\\ x^2-1\cdot при\cdot x>-2\end{cases}$	**B-16** $f(x)=\begin{cases}6-x^2\cdot при\cdot x\le 2\\ x-3\cdot при\cdot x>2\end{cases}$
B-17 $f(x)=\begin{cases}1-x\cdot при\cdot x\le 1\\ x^2+2\cdot при\cdot x\ge 1\end{cases}$	**B-18** $f(x)=\begin{cases}3+x, & при\ \ x<-1\\ 3x^2, & при\ \ x\ge -1\end{cases}$	**B-19** $f(x)=\begin{cases}x+3, & при\ x\le -1\\ -x+4, & при\ \ x>-1\end{cases}$
B-20 $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & при\ \ x\le 0\\ 3x-2, & при\ \ x>0\end{cases}$		

Дополнительные задачи*.

1.Вычислить пределы:

1) 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x}-2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{1-\cos 2x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot tgx}{\sin^2 x}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{2n+3}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}$

2.Исследовать функции на непрерывность. Сделать чертеж.

1) $f(x)=\begin{cases}x+2\cdot при\cdot x\le -1\\ x^2+1\cdot при\cdot -1<x\le 1\\ -x+3\cdot при\cdot x>1\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}-2x\cdot при\cdot x\le 0\\ x^2+1\cdot при\cdot 0<x\le 1\\ 2\cdot при\cdot x>1\end{cases}$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+6}{x^2-1}=\dfrac{2+6}{2^2-1}=\dfrac{8}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{x^2}=\dfrac{9-9}{9^2}=\dfrac{0}{81}=0$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2\cdot 0-1}{1-\cos 0}=\dfrac{-1}{1-1}=-\infty$

Более сложные случаи, так называемые неопределенности $\left(\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};1^{\infty}\right)$, рассмотрим на примерах.

Пример 2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+1}{x^2-3x-7}$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\frac{2\cdot 9-5\cdot 3-3}{3\cdot 9-4\cdot 3-15}=\frac{0}{0}$

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента *x=3* приводит к неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.чтобы раскрыть неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.числитель и знаменатель дроби разложим на множители как квадратные трехчлены по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2- корни трехчлены. Затем сокращаем дробь на *(x-3)*.

$2x^2-5x-3=0$

$D=b^2 4ac=25+24=49$

$x_{12}=-\frac{b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_{12}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{5\pm 7}{4};x_1=3,x_2=-\frac{1}{2}$

$3x^2-4x-15=0$

$D=16-4\cdot(-45)=16+180=196$

$x_{12}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{4\pm 14}{6};x_1=3,x_2=-\frac{5}{3}$

Итак, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x-4x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+\frac{1}{2})}{3(x-3)(x+\frac{5}{3})}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+1}{3x+5}=\frac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+5}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}=\frac{\sqrt{4-1}-\sqrt{7-4}}{4-4}=\frac{0}{0}$$

Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})$. Такое преобразование даст возможность сократить дробь на множитель (х-4).

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1-(7-x)}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

в) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+1}{x^2-3x-7}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+1}{x^2-3x-7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{7}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}}=\frac{4}{0}=\infty$$

При $x\to\infty$ получаем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим и числитель и знаменатель на x^4(старшая степень числителя). Величины $\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^4},\frac{3}{x^3};\frac{7}{x^4}$ бесконечно малые при $x\to\infty$ и их пределы равны нулю.

Итак, наша дробь как величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой величиной и её предел равен бесконечности.

Пример 3. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg 9x}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

Решение.

а) Сведем к первому замечательному пределу (1.1).

Заменим $tg 9x=\frac{\sin 9x}{\cos x}$, умножим числитель и знаменатель на *4x* и *9x* используем свойства пределов:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{tg9x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{9x}{\sin9x}\cdot\frac{\cos9x}{1}\cdot\frac{4x}{9x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{9x}{\sin9x}\cdot\lim_{x\to0}\cos9x\cdot\lim_{x\to0}\frac{4}{9}=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos2x}}$

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\text{замена}\\ 1-\cos2x=2\sin^2x\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2x}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{2}\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пример 4. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{5-n}\right)^{3n}$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5-n}\right)^{3n}=\left[1^{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}\text{сведем}\cdot\text{ко}\cdot\text{второму}\\ \text{замечательному}\cdot\text{пределу}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e\\ \text{замена}:\dfrac{2}{5-n}=\dfrac{1}{x}\\ 2x=5-n,\text{отсюда}\cdot n=5-2x\\ x\to\infty\cdot\text{при}\cdot n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3(5-2x)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{15-6x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{15}\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-6}=1\cdot e^{-6}=e^{-6}$$

Величина $\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ бесконечно малая.

Пример 5.

Исследовать функцию $y=9^{\frac{4}{5-x}}$ на непрерывность. Установить характер точек разрыва. Схематично построить график функции .

Решение.

Функция $y=9^{\frac{4}{5-x}}$ элементарная, поэтому она непрерывна во всех точках, кроме точки $x_0=5$, где она не определена.

$$\lim_{x\to5-0}\frac{4}{5-x}=\left(\frac{4}{+0}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to5+0}\frac{4}{5-x}=\left(\frac{4}{-0}\right)=-\infty.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to5-0}9^{\frac{4}{5-x}}=9^{\lim\limits_{x\to5-0}\frac{4}{5-x}}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to5+0}9^{\frac{4}{5-x}}=9^{\lim\limits_{x\to5+0}\frac{4}{5-x}}=0$. В точке $x_0=5$- разрыв II рода, т. к. левосторонний предел бесконечен.

График функции на рисунке 1.

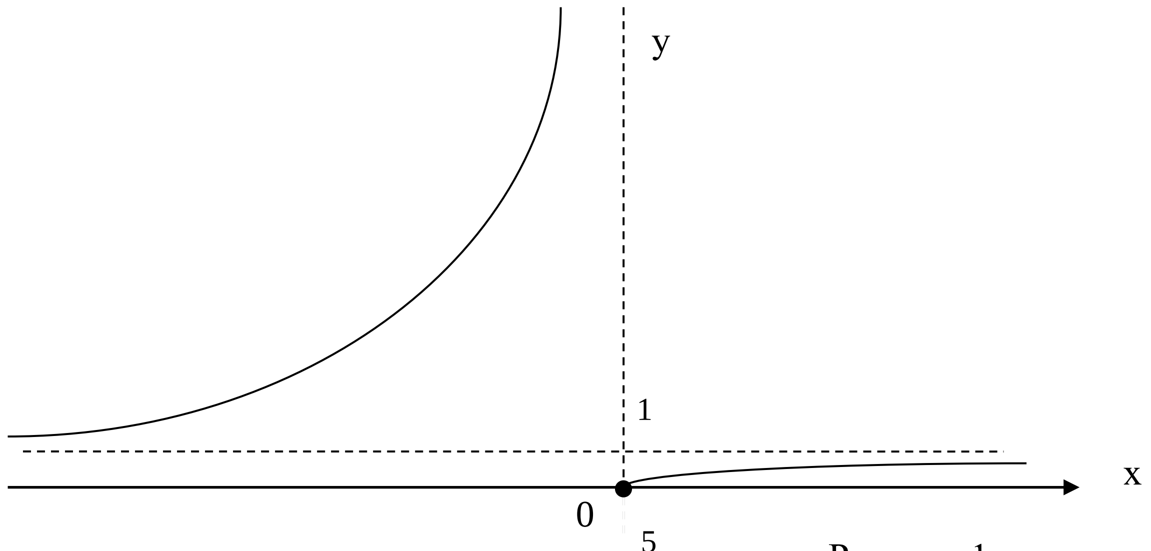


Рисунок 1

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

2.1 Вопросы для самопроверки

1.Сформулируйте определение производной. Общее правило нахождения (четыре шага).

2. Каков геометрический, экономический, механический смысл производной?

3.Что называется дифференциалом функции?

4. Применение дифференциала к приближенному вычислению значению функции.

5. Каковы признаки возрастания и убывания функций?

6. Что называется экстремумом функции? Как найти максимум и минимум функции?

7. Чем отличается максимум функции, заданной на некотором отрезке, от ее наибольшего значения? Тот же вопрос о минимуме и наименьшем значении функции.

8.Как находят интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции?

9.Что называется асимптотой кривой? Как находятся вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

10. Сформулируйте правило Лопиталя.

2.2 Задания для самостоятельного решения

Контрольная работа по теме: «Производная функции»

Найти производные следующих функций и вычислить их значения при указанных значениях аргумента.

B-1	а) $f(x)=3x-\frac{1}{x}+2\sqrt[3]{x},\ f'(4)-?;$ в) $S(t)=\frac{t^2}{t^2-2};$ д) $y=\ln\frac{3x^2-1}{3x^2+1}$	б) $y=e^x\cdot(2-3x);$ г) $y=e^{2\cos x}\cdot tg5x;$ е) $xy^2-3x^2=4y^3+3$
B-2	а) $f(x)=1+\frac{3}{x^4}-\sqrt[3]{x},\ f'(1)-?;$ в) $y(\varphi)=(3-\varphi^2)\cdot tg\varphi;$ д) $y=4^{\cos^3 x-3\cos x}$	б) $y=\frac{x^2}{x^2-1};$ г) $y=e^{3\sin x}+tg\sqrt{x};$ е) $y^3+x^3=4x^2y$
B-3	а) $f(x)=4x-\frac{1}{x^4}+3\sqrt[3]{x^2},\ f'(1)-?;$ в) $z(t)=e^t\cdot(3t-1);$ д) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$	б) $y=\frac{x}{x^2+1};$ г) $y=e^{5x}+\ln^3 x;$ е) $x^3+3xy+y^2=2$
B-4	а) $f(x)=5x-\frac{7}{x}+\sqrt[3]{x},\ f'(4)-?;$ в) $g(\varphi)=(1-2\varphi)\cdot\sin\varphi;$ д) $y=arctg\sqrt{4x-1}$	б) $y=\frac{x}{x^2-3};$ г) $y=ctg3x-e^{x^2-1};$ е) $x^2+3x^3\cdot y=y^2+3$
B-5	а) $f(x)=6x-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x},\ f(4)-?;$ в) $S(t)=\frac{t}{t^2-3};t=1;$ д) $y=3^{\sin x}-x\cdot ctg2x$	б) $y=\sin x\cdot(1-2x);$ г) $y=ctg7x+\cos(x^6-1);$ е) $3x+3y-x^2y^2=3$
B-6	а) $f(x)=3x+\frac{5}{x}-2\sqrt[3]{x},\ f(1)-?;$ в) $S(t)=\frac{t^2}{t^3+3};t=0;$ д) $y=\sin^3 x+tg\sqrt{x}$	б) $y=\ln x\cdot(x^2+2x);$ г) $y=x^2\cdot e^{-x^2}.$ е) $x+4y-x^2y^2=9$
B-7	а) $f(x)=3-\frac{1}{x^3}+4\sqrt[3]{x},\ f'(1)-?;$ в) $g(t)=(2t+3)\cdot e^t;t=0;$ д) $y=4^{\cos x}-\arcsin 8x$	б) $y=\sin(5-3\varphi);$ г) $y=\ln 2x-e^{-x^2+1};$ е) $2x-4y+x^2y=1$

В-8	а) $f(x)=2x^2+\frac{3}{x^2}-\sqrt[3]{x^2}$, $f'(4)-?$;	б) $y=\frac{x^2}{x^2+5}$;
	в) $S(t)=(t^2+1)\cdot e^t$;	г) $y=x^2\cdot e^{\sin x}$.
	д) $y=\cos\sqrt{4x-1}-ctg\,\frac{x}{5}$	е) $x+4y^3+x^2y=8$
В-9	а) $f(x)=3x^3+\frac{4}{x^4}-5\sqrt{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{t^5}{t^3-1}$;
	в) $y(\varphi)=(\varphi^2-1)\cdot\sin\varphi$;	г) $y=3^{ctgx}+\sqrt{x-2x^2}$;
	д) $y=\ln(3x^2+6)+\cos 3x$	е) $3x^4+3y^3=6yx$
В-10	а) $f(x)=2x^3+\frac{1}{3x^3}+\sqrt[3]{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^3}{2-x}$;
	в) $S(t)=(t^2+3)\cdot e^t$;	г) $y=6^{2x-1}-x\cdot\ln\cos x$.
	д) $y=\ln(3x^2+6)+\cos 3x$	е) $xy-e^x+y^2=0$
В-11	а) $f(x)=2\cdot x^6-\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^3}{2-x^3}$;
	в) $y(\varphi)=(\varphi^2+3)\cdot\sin\varphi$;	г) $y=ctg8x-\sqrt{x^4-2}$;
	д) $y=e^{-\cos x}+\log_3 4x$	е) $y\ln x+x^3=6-y^2$
В-12	а) $f(x)=2x^3-\frac{3}{x^2}+4\sqrt[3]{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^3-7}{x^2}$;
	в) $S(t)=(t^2+1)\cdot\ln t$;	г) $y=e^{6-x^2}+(x^2-9)^3$;
	д) $y=e^{-\cos x}+\log_3 4x$	е) $y^3x^2-3x=y^2$
В-13	а) $f(x)=x^3+\frac{2}{x^2}+3\sqrt[3]{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^2+6}{x^3}$;
	в) $y(\varphi)=(\varphi+1)\cdot tg\varphi$;	г) $y=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+5x^3}$;
	д) $y=e^{-x^3}+\log_5 2x$	е) $3xy=x^3+y^3$
В-14	а) $f(x)=x^7+\frac{6}{x}+2\sqrt[3]{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^3-8}{x^2}$;
	в) $g(t)=(3t+5)\cdot e^t$;	г) $y=x^4\cdot tg\left(3-\frac{x}{2}\right)$.
	д) $y=\sqrt{3x-24}-e^{5x}$	е) $e^x\cdot y-x+y^2=0$
В-15	а) $f(x)=x^2-\frac{2}{x^3}+6\sqrt[3]{x}$, $f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^5+1}{x^3}$;
	в) $S(t)=(t^2-1)\cdot\ln t$;	г) $y=x^2\cdot\sin(4-x^3)+\sqrt{x^3-1}$;
	д) $y=\ln^3 x\cdot\sin 7x$	е) $x^4-2yx=y^3-2$

В-16 а) $f(x)=x^5+\frac{1}{x^3}+2\sqrt[3]{x},\ f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^6+3}{x^2}$;
в) $y(\varphi)=\varphi^2\cdot(\sin\varphi+2)$;	г) $y=x^3\cdot\cos(x^4+1)+\sqrt{2x-x^4}$;
д) $y=\sqrt{8x+5}-e^{x^2-9}$	е) $4x^3+\ln x\cdot y=y^2-3$
В-17 а) $f(x)=3x^2-\frac{2}{x^3}+5\sqrt[3]{x},\ f'(1)-?$;	б) $y=\frac{t^3-9}{t^2}$;
в) $y(\varphi)=(\varphi^2+5)\cdot\cos\varphi$;	г) $y=x^3\cdot tg\left(\frac{x}{2}+2\right)-\left(2x^4-x\right)^2$;
д) $y=\arcsin 2x+(3x^2+1)^4$	е) $5x^2+3xy-2y^2=1$
В-18 а) $f(x)=5x^2+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x},\ f'(4)-?$;	б) $y=\frac{x^2}{x^3+5}$;
в) $S(t)=(t^2+2)\cdot e^t$;	г) $y=e^{2x-x^2}\cdot\ln(6-x^4)$;
д) $y=\cos(5+x^3)+e^{\sqrt{x}}$	е) $e^x-e^{-2y}+xy=0$
В-19 а) $f(x)=7x^3+\frac{4}{x^2}+\sqrt[3]{x^2},\ f'(1)-?$;	б) $y=\frac{t^6}{t^2+1}$;
в) $y(\varphi)=\varphi^2\cdot\sin\varphi;\varphi=\frac{\pi}{2}$;	г) $y=x^3\cdot\cos\left(\frac{x}{3}+2\right)+\ln(2x^5+7)$;
д) $y=\sqrt{2-x^2}-6^x$	е) $x^3+\ln y\cdot x=y^2+5$
В-20 а) $f(x)=3x^5+\frac{8}{x}-\sqrt[3]{x},\ f'(1)-?$;	б) $y=\frac{x^3}{x^2+6}$;
в) $S(t)=(t-3)\cdot\ln t$;	г) $y=\ln(4x^3-1)+x^6\cdot\sin\left(\frac{x}{6}+1\right)$.
д) $y=e^{x^2+3}+\ln 3x$	е) $e^{xy}+x+y=0$

Дополнительные задачи*.

1) Найти производные функций:

а) $y=arctg^3\ln\frac{\sqrt{x}}{x+2}$; б) $y=\sqrt[5]{\sin^4\left(\frac{x-3}{x}\right)}$; в) $y=2^{tg^7\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}\right)}$

2) Найти производные неявных функции:

а) $\sin(x-2y)+\frac{x^3}{y}=7x$; б) $e^{xy}+\frac{y^3}{x}=\cos 3x$; в) $tg(x+5y)+\frac{y-2}{x^3}=7^x$

3) Найти производную с помощью логарифмического дифференцирования:

а) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$; б) $y=\left(x^2+3\right)^{\sin x}$; в) $y=\left(\cos x\right)^{\frac{2}{x}}$ г) $y=\sqrt[5]{\frac{\left(x^2+3\right)(x+1)}{\left(x-3\right)^3}}$

Решение типовых примеров

Пример 1.

Найти производную функции $f\left(x\right)=2x-\frac{1}{x^3}+3\sqrt[3]{x^2}$ и вычислить её значение при $x=1$.

Решение.

Преобразуем данную функцию, используя свойства степени: $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ и $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

$$f\left(x\right)=2x-x^3+3x^{\frac{2}{3}}$$

Последовательно применим правило дифференцирования алгебраической суммы .

$$f'(x)=(2x)'-\left(x^{-3}\right)'+\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)'=2(x)'-\left(x^{-3}\right)+3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)=2\cdot 1-(-3)\cdot x^{-3-1}+3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=$$

$$=2+3\cdot x^{-4}+2\cdot x^{-\frac{1}{3}}=2+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}=2+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Для нахождения значения производной в точке подставим в выражение производной значение $x=1$.

Получим: $f'(1)=2+\frac{3}{1^4}+\frac{2}{\sqrt[3]{1}}=7$

Пример 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=x^2\cdot\ln x$; б) $y=\frac{t^3-10}{t^2}$

Решение.

а) Применим правило дифференцирования произведения двух функций

$$y'=\left(x^2\right)'\cdot\ln x+x^2\cdot\left(\ln x\right)'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x\cdot\left(2+\ln x+1\right)$$

б) Применим правило дифференцирования частного :

$$y' = \frac{\left(t^3-10\right)' \cdot t^2 - \left(t^3-10\right)\cdot\left(t^2\right)'}{\left(t^2\right)^2} = \frac{3t^2\cdot t^2 - \left(t^3-10\right)\cdot 2t}{t^4} = \frac{3t^4-2t^4+20t}{t^4} = \frac{t^4+20t}{t^4} =$$

$$= \frac{t\left(t^3+20\right)}{t^4} = \frac{t^3+20}{t^3}$$

Пример 3. Найти производные следующих функций:

а) $y=\left(x^2-5x\right)^3$; б) $y=e^{\sin x+1}$; в) $y=x^3\cdot\ln\frac{x}{2}$; г) $S=2^{\arcsin t}$.

д) $y^2x+4y+3x=6$; е) $y=\sqrt[x^2]{\sin x}$

Решение.

Функции (а), (б), (в) представляют собой сложные функции.

а) Положим $u=x^2-5x$, тогда $y=u^3$

Последовательно применим правило дифференцирования сложной функции

$$y'(x)=\left(u^3\right)'=3u^2\cdot u'(x)$$

$$y'(x)=3\left(x^2-5x\right)^2\cdot\left(x^2-5x\right)'=3\left(x^2-5x\right)^2\cdot(2x-5)$$

б) Положим $u=\sin x+1$, тогда $y=e^u$.

$$y'(x)=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'(x)$$

$$y'(x)=e^{\sin x+1}\cdot(\sin x+1)'=e^{\sin x+1}\cdot(\cos x+0)=\cos x\cdot e^{\sin x+1}.$$

в) Второй сомножитель есть сложная логарифмическая функция

$\ln u$, где $u=\frac{x}{2}$.

$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'(x)$ т.е. $\left(\ln\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$

Имеем

$$y'(x)=\left(x^3\right)'\cdot\ln\frac{x}{2}+x^3\cdot\left(\ln\frac{x}{2}\right)'=3x^2\cdot\ln\frac{x}{2}+x^3\cdot\frac{1}{x}=x^2\cdot\left(3\ln\frac{x}{2}+1\right)$$

г) Пусть $y=2^u$, *где* $u=\arcsin t$

$$S'=2^u\cdot\ln 2\cdot u'=2^{\arcsin t}\cdot\ln 2\cdot(\arcsin t)'=\frac{2^{\arcsin t}\cdot\ln 2}{\sqrt{1-t^2}}$$

д) $y^2x + 4y + 3x = 6$

В данном случае зависимость между аргументом x и y задана уравнением, которое не разрешено относительно функции y. Чтобы найти производную y', следует дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'. Имеем;

$$2y \cdot y' \cdot x + y^2 + 4y' + 3 = 0$$

Из полученного равенства, связывающего x, y и y', выразим производную y':

$$2y \cdot y' \cdot x + 4y' = -y^2 - 3$$

$$y' = -\frac{y^2 + 3}{2xy + 4}.$$

Типовой расчет №1 по теме: «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Задание № 1.

В задачах №1-10 составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой x_0. Выполнить чертеж.

№	Уравнение	x_0	№	Уравнение	x_0
1	$y = 2x - x^2$	-1	**6**	$y = 2x^2 + 3x - 1$	2
2	$y = 3x - 3x^2$	2	**7**	$y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3)$	4
3	$y = 3x^2 - 5x + 8$	1	**8**	$y = 4 - x^2$	-1
4	$y = \frac{3}{x}$	3	**9**	$y = 2x^2 + x - 1$	$\frac{1}{2}$
5	$y = \frac{1}{4}(4x - x^2)$	1	**10**	$y = x^2 + 5x - 1$	1

Задание №2.

В задачах № 11-20 вычислить приближенные значения с помощью дифференциала функции.

11	$\sqrt{36{,}12}$	**16**	$\sqrt{16{,}64}$
12	$\cos 62°$	**17**	$\sin 28°$

13	$tg46°$	**18**	$ctg47°$
14	$\sqrt{225{,}01}$	**19**	$\ln 1{,}08$
15	$\sqrt{25{,}54}$	**20**	$\ln 1{,}05$

<u>Задание № 3.</u>

В задачах №21-30 найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением.

	уравнение	t		уравнение	t
21	$S(t)=t^3-2t^2-4$	2	**26**	$S(t)=-6\sqrt{t}+2t$	4
22	$S(t)=t^2-6t+8$	3	**27**	$S(t)=3t^3-6t^2-4$	4
23	$S(t)=-4\sqrt{t}+3t$	1	**28**	$S(t)=\dfrac{4}{t}+4t$	2
24	$S(t)=t^2-11t+30$	6	**29**	$S(t)=\cos 2t+t$	0
25	$S(t)=100t-4{,}9t^2$	5	**30**	$S(t)=t+\sin 2t$	0

<u>Задание № 4.</u>

В задачах № 31-40 исследовать функцию и построить график, для функции **а)** найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

№/в	функция	$[a;b]$	№/в	функция	$[a;b]$
31	а) $y=x^3-9x^2+24x-2$ б) $y=\dfrac{5x}{x+5}$	$[-2;3]$	**36**	а) $y=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x$ б) $y=\dfrac{2x}{x+3}$	$[-6;3]$
32	а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-4x+10$ б) $y=\dfrac{3x}{x-4}$	$[0;3]$	**37**	а) $y=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$ б) $y=\dfrac{6x}{x+1}$	$[-1;5]$
33	а) $y=\dfrac{1}{5}x^3-\dfrac{9}{5}x^2+3x+3$ б) $y=\dfrac{2x}{x-1}$	$[1;4]$	**38**	а) $y=x^3-9x^2+15x-3$ б) $y=\dfrac{2x}{x-3}$	$[-1;4]$
34	а) $y=\dfrac{1}{2}x^3+6x^2-7$ б) $y=\dfrac{x}{x-6}$	$[0;5]$	**39**	а) $y=\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-4$ б) $y=\dfrac{x}{x+2}$	$[1;6]$

35	а) $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{8}x^2+3x-6 \quad [-2;3]$ б) $y=\frac{2x}{x+6}$	**40**	а) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2\ [-2;7]$ б) $y=\frac{6x}{1+x}$

<u>Задание № 5.</u> Решить задачу.

41) Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна $S=48\pi\left(м^2\right)$.

42) Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна $l=3\left(м\right)$.

43) Объем правильной треугольной призмы равен $V=32\left(м^3\right)$. Какова должна быть длина стороны основания призмы, чтобы ее полная поверхность была наименьшей?

44) Объём цилиндра равен $V=81\pi\left(м^3\right)$. Каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

45) Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 144 (см^3), причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

46) Каковы должны быть размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в круг радиуса 6 см?

47) Проволока длиной 40 см согнута в прямоугольник. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

48) Канал, ширина которого 27 м, под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 м. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

49) Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна $S=24\pi\left(м^2\right)$.

50) Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна $l=\sqrt{3}\ \left(м\right)$.

Дополнительные задачи*.

1) В какой точке касательная к параболе $y=-x^2+4x-6$ наклонена к оси абсцисс под углом 45^0.

2) Найти углы, под которыми пересекаются кривые $y^2=2x$ и $x^2+y^2=8$

3) Вычислить приближенно: а) $arctg1{,}05$; $\sqrt[4]{16{,}64}$

4) Провести полное исследование функции:

а) $y = e^{\frac{1}{x-1}}$; б) $y = 4x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$; в) $y = \ln(1 - x^2)$; г) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$

Решение типовых примеров.

Пример 1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Выполнить чертеж.

Решение.

Уравнение касательной к кривой имеет вид: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$,

уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Вычислим $y_0 = y(x_0) = 2^2 - 4 = 0$, $y'(x) = 2x \Rightarrow y'(2) = 4$.

Подставим в уравнения, получим: $y - 0 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8$ - уравнение касательной; $y - 0 = -\dfrac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ - уравнение нормали. Чертеж (рис.2).

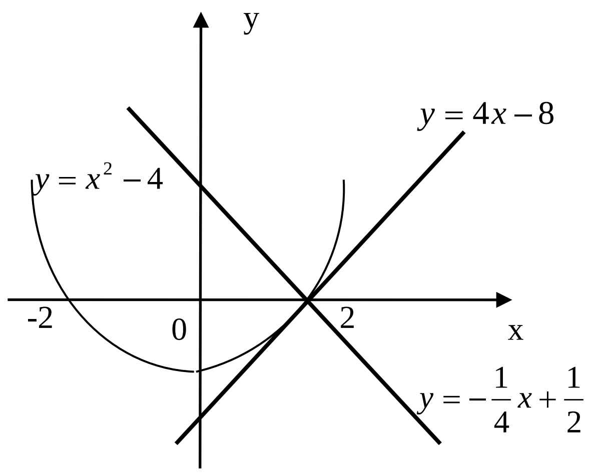


Рисунок 2

Пример 2.

С помощью дифференциала приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{1{,}3}$ б) $tg43°$

Решение.

а) Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1{,}3$

Используем формулу для вычисления приближенных значений функции: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$

Положим $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = 1{,}3 - 1 = 0{,}3$

Значит, $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{1} = 1$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^{\ 2}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3}$$

Подставляя найденные значения в формулу, получим:

$$\sqrt[3]{1.3} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$$

б) $tg43°$.

В нашем случае $y = tgx;\ x = 43°$. Положим $x_0 = 45°$. $\Delta x = 43° - 45° = -2°$. Для вычислений градусы переведем в радианы $\Delta x = -0{,}035$;

$$f(x_0) = tg45° = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x};\quad f'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 45°} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

Используем формулу для вычисления приближенных значений функции: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$

$$tg43° \approx 1 + 2 \cdot (-0{,}035) = 1 - 0{,}070 = 0{,}930$$

Пример 3. Провести полное исследование функции *y=f(x)* и построить ее график:

а) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10$ б) $y = \dfrac{2}{x+1}$

Решение.

а) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10$

1) Функция определена при всех действительных значениях x, значит, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Т.к. областью определения данной функции является вся числовая ось, то точек разрыва функции, а значит, и вертикальных асимптот, не существует.

3) Определим, является ли данная функция четной или нечетной.

$$f(-x) = \frac{1}{12}(-x)^3 - \frac{1}{2}(-x)^2 - 3(-x) + 10 = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$$
$$= -\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - 10\right)$$

Из равенства видно, что $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, т.е. функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Найдем интервалы монотонности функции и её экстремумы (если они существуют).

Для этого первую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10\right)' = \frac{1}{12} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0 \quad |\cdot 4$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = -12$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 64$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 8}{2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

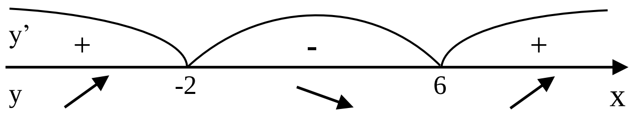
Получили две критические точки, которые разбивают область определения на три интервала: $(-\infty; -2), (-2; 6), (6; +\infty)$.

Определим знак первой производной в каждом интервале:

$x = -4 \in (-\infty; -2) \Rightarrow f'(-4) = \frac{1}{4} \cdot (-4)^2 - (-4) - 3 = 5 > 0$, значит, на этом интервале функция возрастает.

$x = 4 \in (-2; 6) \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 4 - 3 = -3 < 0$, значит, на этом интервале функция убывает.

$x = 8 \in (6; +\infty) \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{4} \cdot 8^2 - 8 - 3 = 5 > 0$, значит, на этом интервале функция возрастает.



При переходе через точку $x_1 = -2$ производная y' меняет знак с «+» на «-», значит, в этой точке функция имеет максимум, при переходе через точку $x_2 = 6$ производная y' меняет знак с «-» на «+», значит, в этой точке функция имеет минимум. Вычислим значения функции в найденных точках экстремума:

$$y_{max} = y(-2) = \frac{1}{12}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 10 = -\frac{8}{12} - 2 + 6 + 10 = 13\frac{1}{3}$$

$$y_{min} = y(6) = \frac{1}{12}(6)^3 - \frac{1}{2}(6)^2 - 3\cdot 6 + 10 = 18 - 18 - 18 + 10 = -8$$

Функция имеет две точки экстремума:

$$A_{max}\left(-2; 13\frac{1}{3}\right), B_{min}(6; -8)$$

5) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба (если они существуют).

Для этого вторую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{1}{4}x^2 - x - 3\right)' = \frac{1}{4}\cdot 2x - 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

$\frac{1}{2}x - 1 = 0 \quad |\cdot 2$

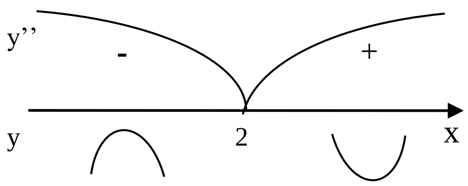
$x - 2 = 0 \ \Rightarrow x = 2$

Получили одну критическую точку, которая разбивает числовую ось на два интервала: $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

Определим знак второй производной в каждом интервале:

$x = -4 \in (-\infty; -2) \Rightarrow f''(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4) - 1 = -3 < 0$, значит, на этом интервале график функции выпуклый.

$x = 4 \in (2; +\infty) \Rightarrow f''(4) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 1 = 1 > 0$, значит, на этом интервале график функции вогнутый.



При переходе через точку $x = 2$ производная y'' меняет знак с «-» на «+», значит, $x = 2$ есть абсцисса точки перегиба графика функции. Вычислим ординату этой точки: $y(2) = \frac{8}{12} - 2 - 6 + 10 = 2\frac{2}{3}$

Т.о., P $\left(2; 2\frac{2}{3}\right)$ – точка перегиба графика функции.

6) Найдем наклонные асимптоты графика функции.

Находятся они по формуле: $y = kx + b$, где $k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+10}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x-3+\frac{10}{x} = f(\infty)=\infty,$

значит, наклонных асимптот данная функция не имеет.

7) В прямоугольной системе координат XOY отметим точки экстремума: $A_{max}\left(-2;13\frac{1}{3}\right), B_{min}(6;-8)$, точку перегиба $\mathrm{P}\left(2;2\frac{2}{3}\right)$ и построим график данной функции (рис.3).

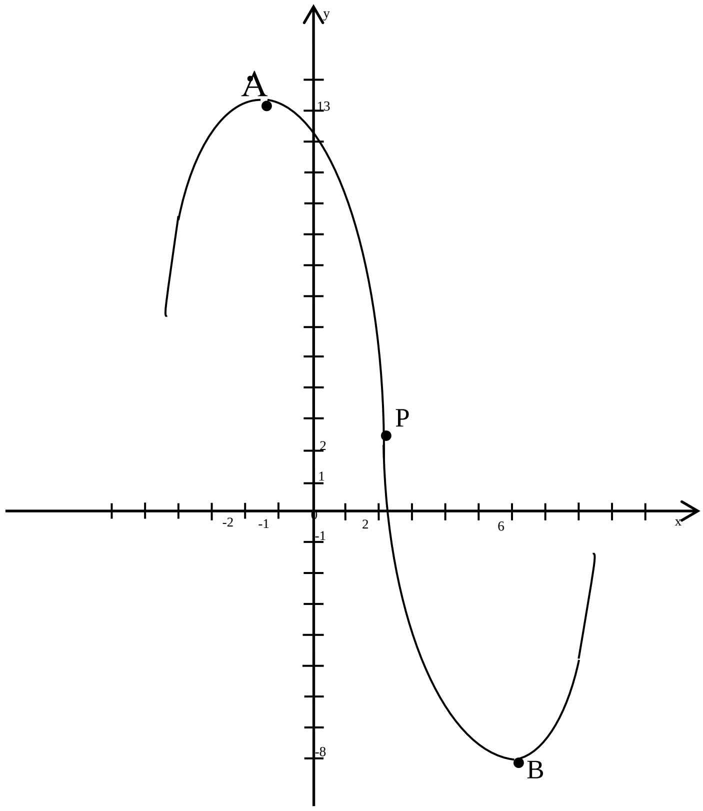


Рисунок 3

б) $y=\dfrac{2}{x+1}$

Решение.

1)Областью определения данной функции являются все значения x, кроме тех, для которых выполняется равенство

$x+1=0 \Rightarrow x=-1.$

Значит, $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty).$

2) Функция не определена при $x=-1$, значит, $x=-1$ есть точка разрыва.

Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{-1-0+1}=\frac{2}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{-1+0+1}=\frac{2}{+0}=+\infty$$

Прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

3) Исследуем функцию на четность и нечетность.

$$f(-x)=\frac{2}{-x+1}=-\frac{2}{x-1}$$

Из равенства видно, что $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, т.е. функция не является ни четной, ни нечетной.

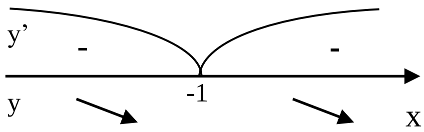
4) Найдем интервалы монотонности функции и её экстремумы (если они существуют).

Для этого первую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение $f'(x)=0$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x+1}\right)' = \frac{2' \cdot (x+1) - 2 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{0 \cdot (x+1) - 2 \cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, но $-2 \neq 0$, значит, критических точек нет.

Определим знак первой производной в каждом из интервалов области определения. Т.к. $-2 < 0$, а квадрат любого числа всегда число положительное, то дробь при любом x из области определения будет отрицательной. Значит, функция убывает на всей области определения, экстремума она не имеет.



5) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба (если они существуют).

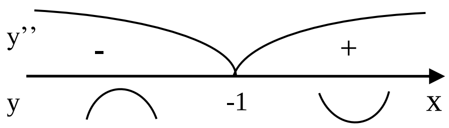
Для этого вторую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right)' = -\left(\frac{2' \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot ((x+1)^2)''}{(x+1)^4}\right) = -\left(\frac{0 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}\right) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, но $4 \neq 0$, значит, критических точек нет. Определим знак второй производной в каждом из интервалов области определения:

$x = -2 \in (-\infty; -1) \Rightarrow f''(-2) = \frac{4}{(-2+1)^3} = -4 < 0$, значит, на этом интервале график функции выпуклый.

$x = 0 \in (-1; +\infty) \Rightarrow f''(0) = \frac{4}{(0+1)^3} = 4 > 0$, значит, на этом интервале график функции вогнутый. Несмотря на то, что при переходе через точку $x = -1$ вторая производная меняет свой знак, она не является точкой перегиба, т.к. не принадлежит области определения данной функции. Значит, точек перегиба график данной функции не имеет.



6) Найдем наклонные асимптоты графика функции.
Находятся они по формуле: $y = kx + b$,
где $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x(x+1)} = f(\infty) = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x+1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1} = f(\infty) = \frac{2}{\infty} = 0$$

Значит, прямая $y = 0$ (т.е. ось OX) есть горизонтальная асимптота.
7)Найдем дополнительную точку А – точку пересечения графика функции и оси OY. Абсцисса этой точки равна 0, т.е. $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$. В прямоугольной системе координат XOY построим вертикальную асимптоту, отметим точку А(2;0) и, учитывая, что ось OX есть горизонтальная асимптота, построим график данной функции

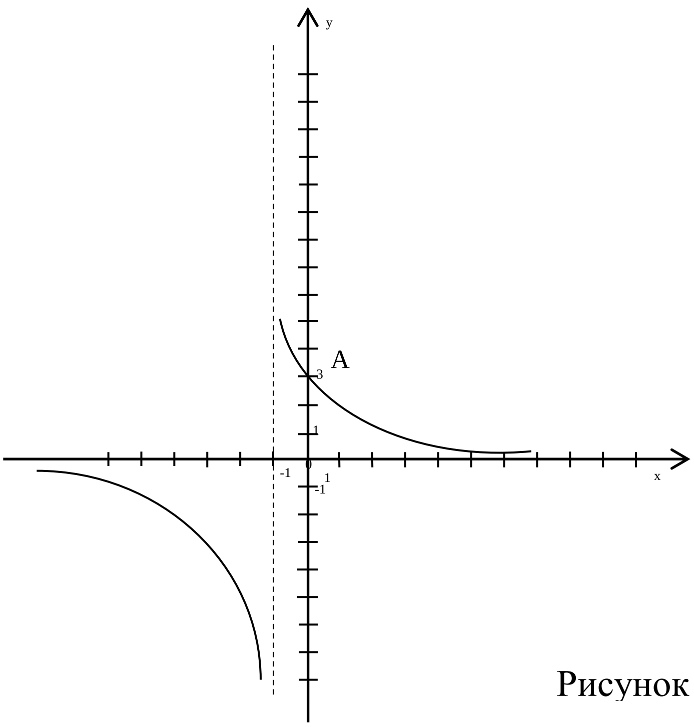


Рисунок 4

Пример 4.
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ на отрезке [-1;2].
Решение.
1. Область определения функции $-\infty < x < +\infty$, значит на отрезке [-1;2] она непрерывна.
2. Находим критические точки.

$y' = (x^3 - 6x^2 + 9x)' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0; 3x^2 - 12x + 9 = 0; x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 3$

3. $x=3$ не принадлежит отрезку [-1;2].
   $y(-1) = -1 - 6 - 9 = -16$
4. $y(2) = 8 - 24 + 18 = 2$
   $y(1) = 1 - 6 + 9 = 4$
5. $y(-1) = -16$ - наименьшее значение функции на отрезке [-1;2]
6. $y(1) = 4$ - наибольшее значение функции на отрезке [-1;2]

Пример 5. Найти скорость и ускорение в указанный момент времени для точки движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением

$S(t) = -t^3 + 9t^2 - 8 \qquad t = 2$

Решение.

Механически $S'(t) = V(t)$ -первая производная от пути по времени есть скорость точки в данный момент, вторая производная от пути по времени, есть ускорение в данный момент времени. $S''(t) = V'(t) = a(t)$

$V(t) = (-t^3 + 9t^2 - 8)' = -3\,t^2 + 18t$

$a(t) = V'(t) = (-3t^2 + 18t)' = -6t + 18$

При $t = 2$ $V(2) = -3 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 = 24$; $a(2) = = -6 \cdot 2 + 18 = 6$

Пример 6. Среди цилиндров, полная поверхность которых равна $S = 6\pi\,(м^2)$, найти цилиндр, имеющий наибольший объем.

Решение.

Пусть радиус основания цилиндра равен x,а высота y. Тогда

$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, откуда $y = \dfrac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{S}{x} - 2\pi x\right)$,

то есть объем цилиндра может быть выражен следующим образом:

$V = \pi x^2 \cdot \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{S}{x} - 2\pi x\right) = \dfrac{S}{2}x - \pi x^3$.

Исследуем полученную функцию на максимум при $x > 0$.

Имеем $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{S}{2} - 3\pi x_2 = 0$ при $x = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} = \sqrt{\dfrac{6\pi}{6\pi}} = 1$.

Так как при $x=1$ выполняется условие $\frac{d^2v}{d^2x}=-6\pi<0$, то объем имеет наибольшее значение. При этом $y=\frac{S-2\pi}{2\pi}=\frac{6\pi-2\pi}{2\pi}=2$, поэтому искомые значения радиуса основания и высоты цилиндра равны соответственно 1 и 2.

Глава 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1 Вопросы самопроверки

1.Сформулируйте определение первообразной. Основное свойство.
2.Что называется неопределенным интегралом?
 Каков его геометрический ?
3.Основные свойства неопределенного интеграла.
4.Метод подстановки в неопределенном интеграле.
5. Выведите формулу интегрирования по частям. Каким образом разбивается интеграл на части в зависимости от подынтегрального выражения?
6. Каким действием можно проверить интегрирование?
7. Сформулируйте определение определенного интеграла и укажите его геометрический смысл, экономический смысл.
8. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
9. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
10. Методы вычисления определенного интеграла.
11. Каким образом вычисляется площадь фигуры с помощью определенного интеграла.
12. Дайте определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Приведите примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

3.2 Задания для самостоятельного решения

Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»

Вычислить неопределенные интегралы:

B-1.

1) $\int\left(\sqrt[7]{x}+7-6x^{3}\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^{2}x/6}$; 3) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

4) $\int\frac{x^{2}dx}{\sqrt{2-3x^{3}}}$; 5) $\int 2x^{4}\cdot\ln x dx$; 6) $\int\frac{3x+10}{x^{2}-8x+10}dx$.

B-2.

1) $\int\left(\sqrt[5]{x}+7-6x^{2}\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sin^{2}6x}$; 3) $\int\frac{x^{2}dx}{x^{6}+4}$

4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^{2}}}$; 5) $\int 2x\cdot\sin 8x dx$; 6) $\int\frac{9x+10}{x^{2}-6x+10}dx$.

B-3.

1) $\int\left(3x^{5}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{2x+12}$; 3) $\int\frac{\cos 6x dx}{\sin^{2}6x}$

4) $\int x^{2}\cdot\sqrt{2+x^{3}}dx$; 5) $\int x\cdot e^{-3x}dx$; 6) $\int\frac{7x+3}{x^{2}-4x+5}dx$.

B-4.

1) $\int\left(2x^{3}-\frac{5}{x^{4}}+7\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^{2}}}$; 3) $\int\frac{x\,dx}{x^{4}+1}$

4) $\int\frac{3x^{4}dx}{x^{5}+4}$; 5) $\int 3x\cdot e^{x}dx$; 6) $\int\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}dx$.

B-5.

1) $\int\left(3x^{8}-\frac{4}{\sqrt[6]{x}}-\frac{2}{x^{8}}\right)dx$; 2) $\int ctg 7x dx$; 3) $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^{3}\sqrt{1-x^{2}}}$

4) $\int\frac{x^{3}dx}{\sqrt{5x^{4}-1}}$; 5) $\int 3x\cdot\sin\frac{x}{3}dx$; 6) $\int\frac{5x-2}{x^{2}-2x+5}dx$.

B-6.

1) $\int\left(2x^{7}-\frac{4}{\sqrt[5]{x}}-\frac{2}{x^{7}}\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sin^{2}8x}$; 3) $\int\frac{2x^{2}dx}{8x^{3}-7}$

4) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 5) $\int 2x\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$; 6) $\int\frac{7x-3}{x^{2}+6x+13}dx$.

В-7.

1) $\int\left(\sqrt[5]{x}+\frac{7}{x^3}-6x^2\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sin^2 6x}$; 3) $\int\frac{2x^2\,dx}{8x^3-7}$

4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$; 5) $\int 2x\cdot\sin 8x dx$; 6) $\int\frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx$.

В-8.

1) $\int\left(3x^5-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-2\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{2x+12}$; 3) $\int\frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

4) $\int x^2\cdot\sqrt{2+x^3}dx$; 5) $\int x\cdot e^{-3x}dx$; 6) $\int\frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx$.

В-9.

1) $\int\left(x^7-\sqrt[6]{x}-10\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{36+x^2}$; 3) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$

4) $\int\frac{x\,dx}{\left(x^2-3\right)^3}$; 5) $\int 3x^2\cdot\ln x dx$; 6) $\int\frac{x-3}{(x+2)\left(x^2+5\right)}dx$.

В-10.

1) $\int\left(3x^8-\frac{4}{\sqrt[6]{x}}-\frac{2}{x^8}\right)dx$; 2) $\int ctg 7x dx$; 3) $\int\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$

4) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5x^4-1}}$; 5) $\int 3x\cdot\sin\frac{x}{3}dx$; 6) $\int\frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx$.

В-11.

1) $\int\frac{2-x^4-\sqrt{x}}{x}dx$; 2) $\int\frac{dx}{2-9x}$; 3) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$

4) $\int 8^{x^2}\cdot x dx$; 5) $\int 3x\cdot\sin\frac{x}{7}dx$; 6) $\int\frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx$.

В-12.

1) $\int\frac{8-x^2-2\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int\frac{dx}{x^2+12}$; 3) $\int\frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

4) $\int e^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int 9x\cdot\cos 18x dx$; 6) $\int\frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx$.

B-13.

1) $\int\left(x^5-\frac{1}{9x}+\frac{4}{x^5}\right)dx$; 2) $\int\cos(5x+1)dx$; 3) $\int\frac{dx}{(9-2x)^2}$

4) $\int\frac{3x\ dx}{\left(3-x^2\right)^2}$; 5) $\int 6x\cdot 4^x dx$; 6) $\int\frac{x+2}{(x-1)\left(x^2+3\right)}dx$.

B-14.

1) $\int\left(2x^4-\frac{8}{x^2}+5\sqrt[4]{x}\right)dx$; 2) $\int\cos(3x-8)dx$; 3) $\int\frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$

4) $\int\frac{x\ dx}{\left(1-5x^2\right)^2}$; 5) $\int 8x\cdot\sin x dx$; 6) $\int\frac{5x+1}{x^3-x}dx$

B-15.

1) $\int\left(8x^2-\sqrt[3]{x}-1/7\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 3) $\int\frac{x\ dx}{\left(1+7x^2\right)^2}$

4) $\int\frac{x^2dx}{\left(1-2x^3\right)^2}$; 5) $\int 7x\cdot 8^x dx$; 6) $\int\frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx$.

B-16.

1) $\int\frac{e^x\sqrt{x}+4x-7}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\sin(3x+1)dx$; 3) $\int\sin^4 x\cdot\cos x dx$

4) $\int\frac{\sqrt[4]{arctg^3}dx}{1+x^2}$; 5) $\int(4x+5)e^{-3x}dx$; 6) $\int\frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2+4x-5}dx$.

B-17.

1) $\int\frac{3^x\sqrt{x}-4x^2+5}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{36+x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{x(2+\ln x)}$;

4) $\int\sin x\cdot\sqrt{\cos^3 x}dx$; 5) $\int(2x+5)\sin 4x dx$; 6) $\int\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+2x-3}dx$.

B-18.

1) $\int\frac{tgx\sqrt{x}-x^3+3}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\sin(7x+1)dx$; 3) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1+3e^x}}$;

4) $\int \frac{2^{tgx}dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int (8x-1)\cos 6x dx$; 6) $\int \frac{x^3-11x^2+14x+27}{x^2-12x+27}dx$.
<u>В-19.</u> 1) $\int \frac{4-x+\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+7}}$; 4) $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$; 5) $\int \arcsin 2x dx$; 6) $\int \frac{x^3-11x^2+38x-26}{x^2-10x+26}dx$.
<u>В-20.</u> 1) $\int \frac{\sqrt{x}+5x-3}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$; 3) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+3e^x}}$; 4) $\int \frac{(1+5tgx)^3 dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int arctg 2x dx$; 6) $\int \frac{5x^3-40x^2+99x-3}{x^2-8x+20}dx$.

Дополнительные задачи*.

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+5\sqrt[4]{x}e^x-3}{\sqrt[4]{x}}dx$; б)

Решение типовых примеров.

Пример 1.
Найти следующие неопределенные интегралы:
а)

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-4\sqrt{x}+5\cdot 3^x-6\right)dx=\int x^{-\frac{1}{6}}dx-4\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\int 3^x dx-6\int dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+5\cdot 3^x/\ln 3-6x+C=\frac{5}{6}\sqrt[6]{x^5}-\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+5\cdot 3^x/\ln 3-6x+C$$

б) $\int \frac{dx}{4-5x}=-\frac{1}{5}\ln(4-5x)+C\cdot$

Пример 2.
Найти неопределенные интегралы:

$$а)\ \int\frac{dx}{x(1+\ln x)^3}=\left|\begin{array}{l}1+\ln x=u\\ \dfrac{dx}{x}=du\end{array}\right|=\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}dt=\frac{u^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(1+\ln x)^2}+C$$

$$б)\ \int\frac{x^2dx}{2x^3-5}=\left|\begin{array}{l}2x^3-5=u\\ 6x^2dx=du\\ x^2dx=\dfrac{du}{6}\end{array}\right|=\frac{1}{6}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{6}\ln|u|+C=\frac{1}{6}\ln\left|2x^3-5\right|+C$$

$$в)\ \int\frac{e^{tg3x}}{\cos^2 3x}dx=\left|\begin{array}{l}tg3x=u\\ \dfrac{3}{\cos^2 3x}dx=du\\ \dfrac{dx}{\cos^2 3x}=\dfrac{du}{3}\end{array}\right|=\int e^u\frac{du}{3}=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{tg3x}+C$$

$$г)\ \int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt=2\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt-$$

$$-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2arctgt+C=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C$$

$$\int x\cdot\sin 2xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x & dv=\sin 2xdx\\ du=dx & v=\int\sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right|=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+$$

$$д)\ +\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=-\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$$е)\int x^3\cdot\ln xdx=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x & dv=x^3dx\\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\int x^3dx=\dfrac{x^4}{4}\end{array}\right|=\frac{x^4}{4}\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$$

$$ж)\ \int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x = A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-1\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A+B;\quad A=-B \\ x & \quad 1=-B+C; \\ x^0 & 0 = A-C;\quad A=C. \end{array}$$

Отсюда $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int \frac{x}{(x-1)\left(x^2+1\right)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$

В первом интеграле используем метод подстановки.

Пусть $x^2+1=t$, тогда $2xdx=dt$ или $dx=\frac{dt}{2x}$.

Производим замену переменной:

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\int\frac{x}{t}\cdot\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c.$$

Второй и третий интегралы вычисляем по формулам:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c; \qquad \int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c.$$

Окончательно заданный интеграл равен:

$$\int\frac{xdx}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c.$$

з) $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Преобразуем, знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла следующим образом:

$$x^2-4x+8=x^2-4x+4+4=(x-2)^2+2^2.$$

Тогда после подстановки $t=x-2$ получаем

$$\int\frac{3x-1}{(x-2)^2+2^2}dx=\int\frac{3(t+2)-1}{t^2+2^2}dt=\int\frac{3t+5}{t^2+2^2}dt=\int\frac{3t}{t^2+2^2}dt+\int\frac{5dt}{t^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+4\right|+$$

$$+\frac{5}{2}arctg\frac{t}{2}+c=\frac{3}{2}\ln\left|(x-2)^2+4\right|+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+c=$$
$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+c.$$

При вычислении первого интеграла использовали замену переменной

$z=t^2+4$, тогда $dz=2tdt$,

откуда $\int\frac{3tdt}{t^2+4}=\frac{3}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+4}=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{3}{2}\ln(t^2+4)+c$.

Типовой расчет №2 по теме «Определенный интеграл»

Задание № 1.

В задачах №1-10 ***(а)*** - вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница и построить соответствующую данному интегралу криволинейную трапецию.

(б) - вычислить определенный интеграл методом замены переменной.

1	а) $\int_0^3 3xdx$; б) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.	**6**	а) $\int_0^4 (2x+1)dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+5}(\sqrt{x+5}-1)}$.
2	а) $\int_0^6 (x+3)dx$; б) $\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$.	**7**	а) $\int_0^3 (2x+4)dx$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{9-x}(\sqrt{9-x}+2)}$
3	а) $\int_0^4 2xdx$; б) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.	**8**	а) $\int_{-1}^0 (2-3x)dx$; б) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+9}$.
4	а) $\int_2^4 (x+4)dx$;	**9**	а) $\int_2^6 (7-x)dx$;

	б) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$.		б) $\int_{3}^{8}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}$.
5	а) $\int_{0}^{2}(2x+3)dx$; б) $\int_{0}^{5}\frac{dx}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+4}+3)}$	**10**	а) $\int_{0}^{3}(x^2+3)dx$; б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}+16}$.

<u>Задание №2.</u>

В задачах №11-20 вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

11	$y=3x^2+4$ $y=3x+10$	**16**	$y=x^2-9x+18$ $y=8-2x$
12	$y=x^2+2$ $y=-x+4$	**17**	$y=x^2-7x+12$ $y=-2x+6$
13	$y=x^2-2$ $y=3x+2$	**18**	$y=3x^2$ $y=-x^2+4$
14	$y=x^2-3$ $y=4x-6$	**19**	$y=x^2-9x+14$ $y=-2x+4$
15	$y=x^2-4x+3$ $y=x-1$	**20**	$y=3x^2+2$ $y=3x+8$

<u>Задание № 3.</u>

В задачах №21-30 вычислить несобственный интеграл.

21	$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x+7)^2}$	**26**	$\int_{0}^{\infty}\frac{x^4\cdot dx}{\sqrt{1-x^5}}$
22	$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+3)^3}$	**27**	$\int_{3}^{\infty}\frac{x\cdot dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$

23	$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{2x+4}$	**28**	$\int_{0}^{\infty} \frac{arctgx \cdot dx}{x^2+1}$
24	$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln^3 x \cdot dx}{x}$	**29**	$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2-1}$
25	$\int_{0}^{\infty} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}$	**30**	$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+4)^5}$

Задание №4. Решить задачу.

31.Скорость тела, движущегося прямолинейно, выражается формулой v=(2+t) м/с. Найдите расстояние, пройденное между моментами t=2с, t=5с.

32.Скорость движения точки изменяется по закону v=(3t^2+2t-1) м/с, найдите путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

33.Скорость точки меняется по закону v=(2t^2+3t-1) м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 9с после начала движения.

34.Скорость тела, движущегося прямолинейно, выражается формулой v=(2t^2+t) м/с. Найдите расстояние, пройденное между моментами t=1с, t=3с.

35.Скорость тела, движущегося прямолинейно, выражается формулой v=(3t^2+2t) м/с. Найдите расстояние, пройденное между моментами t=1с, t=2с.

36.Скорость точки меняется по закону v=(2t^2+5t-2) м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 6с после начала движения.

37.Скорость движения точки v=(12t-3t^2) м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

38.Скорость движения точки v=(18t-3t^2) м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

39.Скорость движения точки v=(9t^2-8t) м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

40.Скорость движения точки v=(2t+3t^{-2}) м/с. Найдите ее путь за вторую секунду.

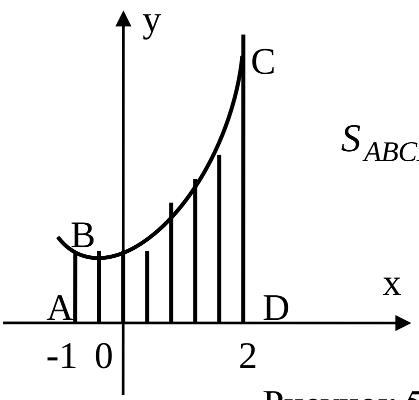
Задание № 5. Решить задачу

41.Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы 60 Н. какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12 м?

42.Под действием силы 80 Н пружина растягивается на 0,02 м. первоначальная длина пружины равна 0,15м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,2 м?
43.Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01м нужна сила 10Н.
44.Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,04м нужна сила 20Н.
45.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,14м?
46.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,32м?
47.Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(6t^2+2t)$ м/с, второе – со скоростью $v=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5с?
48.Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(6t^2-10)$ м/с, второе – со скоростью $v=(3t^2)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10с?
49.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 м до 0,32м?
50.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,12 м до 0,14м?

Решение типовых примеров.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница и построить соответствующую данному интегралу криволинейную трапецию.



$S_{ABCD} = 6 кв.ед.$

Рисунок 5

Решение.
Для вычисления определенного

интеграла применим формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=(\frac{x^3}{3}+x)\Big|_{-1}^{2}=(\frac{2^3}{3}+2)-(\frac{(-1)^3}{3}+(-1))=6$$

Геометрически определенный интеграл представляет площадь фигуры, ограниченной сверху графиком подынтегральной функции $f(x)=x^2+1$, снизу осью Ох, слева прямой х=-1 и справа прямой х=2

Построим фигуру (рис.5), для этого найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(-1;2);\ \begin{cases} y=x^2+1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow y=5 \Rightarrow B(2;5).$$

Пример 2.

Два тела движутся по прямой из одной и той же точки: Первое тело движется со скоростью $V=\left(3t^2-6t\right)$ м/с, второе тело со скоростью $V=\left(10t+20\right)$ м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет встреча?

Решение.

В условии задачи дано, что тела начали двигаться из одной и той же точки, поэтому их пути до встречи будут равны. Найдем уравнение пути каждого их тел: $S_1=\int\left(3t^2-6t\right)dt=t^3-3t^2$; $S_2=\int\left(10t+20\right)dt=5t^2+20t$. Постоянные интегрирования при начальных условиях $t=0, S=0$ равны нулю. Встреча этих тел произойдет при условии $S_1=S_2$ откуда $t^3-3t^2=5t^2+20t$ или $t^3-8t^2-20t=0$.

Решим это уравнение: $t\left(t^2-8t-20\right)=0$, откуда $t_1=0; t_2=-2; t_3=10$.

В момент $t=10c$ произойдет встреча этих тел после начала движения. Путь, пройденный каждым из тел, найдем из уравнения пути: $S_2=S_1=10^3-3\cdot10^2=700$ (м).

Пример 3.

Сжатие *x* винтовой пружины пропорционально приложенной силе *F*. Вычислить работу силы *F* при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение.

Так как *x*=0,01 м при *F*=10 Н, то подставляя эти значения в закон

Гука $F = kx$, получим $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000$ Н/м. Подставив найденное значение k в формулу закона Гука, находим $F = 1000x$, т.е. $f(x) = 1000x$. Взяв пределы интегрирования от 0 до 0,04 вычислим работу:

$$A = \int_0^{0.04} 1000x\,dx = 1000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04} = 0{,}8 \text{ (Дж).}$$

Пример 4.

Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?

Решение.

По длине растяжения пружины на 0,04 м и совершенной работе 20 Дж найдем k, :

$$20 = \int_0^{0.04} kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04} = k\cdot\frac{0{,}0016}{2} = 0{,}0008k, \text{ откуда } k = 20 : 0{,}0008 = 25000 \text{ (Н/м).}$$

Пусть x_1- величина растяжения пружины, соответствующая произведенной при этом работе в 80 Дж. Тогда

$$80 = \int_0^{x_1} 25000x\,dx = 25000\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x_1} = 12500x_1^2 \text{, откуда } x_1^2 = \frac{80}{12500} = \frac{16}{2500};$$

$$x_1 = \frac{4}{50} = 0{,}08 \text{ (м).}$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^5 x\sqrt{3x+1}\,dx$ методом замены переменной.

Решение.

$$\int_0^5 x\sqrt{3x+1}\,dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt{3x+1} = t \Rightarrow 3x+1 = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{3} \Rightarrow dx = \dfrac{2}{3}t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 5 \Rightarrow t = 4 \end{array}\right| = \int_1^4 \frac{t^2-1}{3}\cdot t\cdot\frac{2}{3}t\,dt =$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^4 \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{4^5}{5} - \frac{4^3}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{2754}{15} = 40{,}8$$

Пример 6.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{1}{3}x^2; \qquad y=-x+6$$

Решение.

Построим чертеж участка, найдём точки пересечения линий.
Решим систему:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=-x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2=-x+6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ x^2+3x-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ x_1=\frac{-3-9}{2}=-6 \\ x_2=\frac{-3+9}{2}=3 \end{cases}$$

Точки пересечения линий: *A(-6; 12); B(3;3)*

Участок представляет собой фигуру *AOB*, ограниченную сверху прямой $f_1(x)=-x+6$, снизу параболой $f_2(x)=\frac{1}{3}x^2$ (рис.6).

$$S_{AOB}=\int_{-6}^{3}\left[(-x+6)-\frac{1}{3}x^2\right]dx=\left[-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-6}^{3}=$$

$$=\left(-\frac{9}{2}+18-\frac{3^3}{3^2}\right)-\left(-\frac{36}{2}-36-\frac{(-6)^3}{9}\right)=(-4{,}5+18-3)-(-18-36+24=$$

$$=10{,}5+30=40{,}5(\textit{кв.ед.})$$

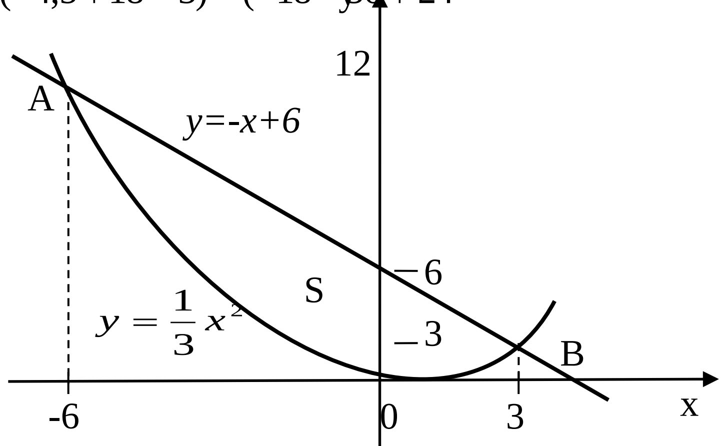


Рисунок 6

Пример 7.

Найти объем тела, образованного вокруг оси *OX* фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y=8x^2$, прямой $y=-6x+14$ и осью *OX*.

Решение.

Для решения указанной задачи построим чертеж. Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 8x^2 \\ y = -6x + 14 \end{cases} \Rightarrow 8x^2 = -6x + 14 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -7/4 \\ x_2 = 1 \end{array} \right.$$

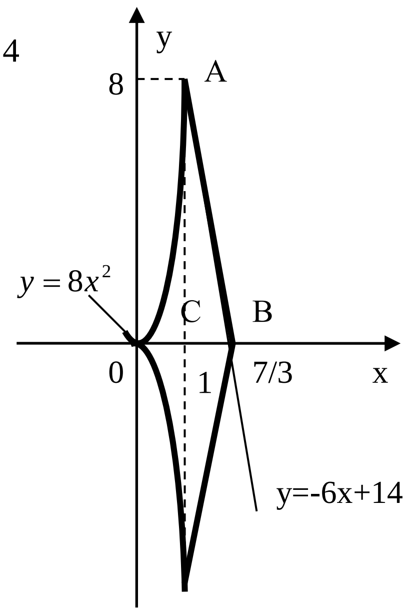


Рисунок 7

Первому квадранту соответствует корень $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 8 \Rightarrow$ *A(1;8)*- точка пересечения

прямой и параболы в первом квадранте.

Найдем абсциссу точки пересечения прямой с осью *OX*, решив уравнение *-6x+14=0*, откуда *x=7/3*. Чертеж на рисунке 7.
Воспользуемся формулой:

$$V_{OX} = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Искомый объем равен сумме двух объемов, образованных вращением криволинейных трапеции: *OAC* при $0 \le x \le 1$;*CAB* при $1 \le x \le 7/3$ вокруг оси *OX*.

$$V = V_{OAC} + V_{CAB} = \pi \int_0^1 \left(8x^2\right)^2 dx + \pi \int_1^{7/3} (-6x + 14)^2 dx.$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся подстановкой:

$t = -6x + 14 \Rightarrow dt = -6dx \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{6} dt \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 8 \\ t_2 = 0 \end{array} \right.$ - пределы интегрирования.

$$V = 64\pi \int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{6}\pi \int_8^0 t^2 dt = 64\pi \left(\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 - \frac{\pi}{6}\left(\frac{t^3}{3} \right)\Bigg|_8^0 = \frac{64\pi}{5} + \frac{256\pi}{9} = \frac{1856\pi}{45}\left(\text{куб.ед.} \right)$$

Пример 8. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_0^\infty e^{-5x} dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \dfrac{dx}{x+2}$; в) $\int\limits_3^\infty \dfrac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$.

Решение.

$$a)\int_0^{\infty} e^{-5x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty} e^{-5x}\Big|_0^b = -\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-5b} - e^0\right) =$$

$$-\frac{1}{5}\left(e^{-\infty} - 1\right) = -\frac{1}{5}(0-1) = \frac{1}{5} - \textit{несобственный интеграл сходится}$$

Замечание: $e^{-\infty} \to 0$, т.к. $e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} \to 0$.

$$б)\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x+7} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-2}\frac{dx}{x+7} = \lim_{a\to-\infty}\ln(x+7)\Big|_a^{-2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\ln 5 - \ln|a+7|\right) =$$

$$= \ln 5 - \ln\infty = \ln 5 - \infty = -\infty - \textit{несобственный интеграл расходится.}$$

в) В заданном интеграле применяем подстановку в определенном интеграле.

Пусть $\ln x = t$, тогда $\dfrac{dx}{x} = dt$, если $x=3$, то $t=\ln 3$; $x \to \infty$, то $t \to \infty$, получим:

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x} = \int_{\ln 3}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 3}^{b}\frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{\ln 3}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3},$$

т.к. при $b\to\infty \Rightarrow \dfrac{1}{b} \to 0$ - *интеграл сходится*

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

4.1 Вопросы для самопроверки.

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Порядок дифференциального уравнения.
2. Что называется решением дифференциального уравнения? Какое решение дифференциального уравнения называется общим? Частным?
3. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения.
5. Что называется дифференциальным уравнением второго порядка? Что называется его общим и частным решением?

6. Виды уравнений, допускающие понижения порядка. Методы их решения.

7. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод нахождения его общего решения.

8. Какова структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

9. Каким образом составляется характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и как оно составляется? Структура общего решения этого уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения.

10. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

11. Каким образом находится частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для правых частей в виде функции: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ в зависимости от значения α и корней характеристического уравнения.

4.2. Задания для самостоятельного решения.

Контрольная работа № 4 по теме «Дифференциальные уравнения»

Задание№1. Найти:

а) общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными;

б) частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Задание№2. Найти:

а) общее решение дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижения порядка;

б) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$;

в) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

№ вар.	Номера заданий	
	1	**2**
1.	а) $xdy = ydx;$ б) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$ $y(0) = 0$ в) $1 + \dfrac{2y}{x} - y' = 0$	а) $y'' = -x^2 + 3$ б) $y'' + 4y' + 4y = 0;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ в) $y'' - 3y' + 2y = x$
2.	а) $(x+1)dy = ydx;$ б) $xy' - y = -x$ $y(1) = 1$ в) $1 + \dfrac{2y}{x} - y' = 0$	а) $y'' = 4x^3 - 2$ б) $y'' - 5y' + 6y = 0;$ $y(0) = 6,\ y'(0) = -3$ в) $y'' + 4y = x + 2$
3.	а) $(x+2)dy = (y+1)dx;$ б) $y' + y = e^{-x};\ y(0) = 0$ в) $xy' = 3y \cdot \ln\dfrac{y}{x}$	а) $y'' = 5x^3 - 1$ б) $y'' - 2y' - 3y = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ в) $y'' + y = e^x$
4.	а) $x^2dy = 2ydx;$ б) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3;\ y(0) = 0$ в) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{4y}$	а) $y'' = 6x^2 - 7$ б) $y'' - 2y' - 8y = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 5$ в) $y'' - y = x - 1$
5.	а) $(x^2+1)dy = (y^2+1)dx;$ б) $y' + ytgx = \dfrac{9}{\cos x}$ $y(0) = 0$ в) $xy' = y(1 + \ln\dfrac{y}{x})$	а) $y'' = -3x^2 - 4$ б) $y'' - y' = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 4$ в) $y'' - 2y' + y = 2x$
6.	а) $x^3dy = (y+1)dx;$ б) $y' + y = e^x$	а) $y'' = -2x^2 + x$ б) $y'' + 9y' = 0;$

	$y(0)=-1$ в) $1+\dfrac{2y}{x}-y'=0$	$y(0)=1,\ y'(0)=3$ в) $y''+2y'+y=4x$
7.	а) $(x^2+1)dy=(2y+1)dx$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=3x\cdot 4^x$ $y(0)=6$ в) $xy'+y\cdot\ln\dfrac{y}{x}=0$	а) $y''=x^2+2x$ б) $y''-6y'=0$; $y(0)=0,\ y'(0)=-1$ в) $y''-4y'+4y=5x$
8.	а) $(x+3)dy=2\sqrt{y}dx$; б) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ $y(0)=-3$ в) $x^2y'=y^2-xy=0$	а) $y''=-3x^2-2x-1$ б) $y''+5y'+6y=0$; $y(0)=1,\ y'(0)=1$ в) $y''+2y'=2e^x$
9.	а) $\sqrt{1-x^2}dy=\sqrt{1-y^2}dx$; б) $xy'-2y=x+1$ $y(1)=0$ в) $(x+y)y'+x-y=0$	а) $y''=9x^2+x-3$ б) $y''-2y'+5y=0$; $y(0)=-1,\ y'(0)=4$ в) $y''+9y=x-2$
10.	а) $dy=-ytgx\cdot dx$; б) $xy'+2y=x^4$ $y(1)=1$ в) $x\ y'=y+x\ell^{\frac{y}{x}}=0$	а) $y''=9x^3+x^2-1$ б) $y''+y'=0$; $y(0)=2,\ y'(0)=7$ в) $y''+y'-6y=5e^x$
11.	а) $(x+1)y'=y+3$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2\cdot e^x$ $y(1)=0$ в) $xy'=y-x\ell^{\frac{y}{x}}$	а) $y''=3x^4+2x^2+x-1$ б) $y''+2y'-3y=0$; $y(0)=0,\ y'(0)=1$ в) $y''-6y=x+1$
12.	а) $2yy'=tgx$; б) $y'-\dfrac{5y}{x}=x^5\cdot\sin 2x$ $y(0)=-2$	а) $y''=9x^3+x^2-1$ б) $y''-7y'+10y=0$; $y(0)=2,\ y'(0)=-1$ в) $y''+25y=3e^x$

	в) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{3y}$	
13.	а) $(1-x)y' = y-1$; б) $y' + y\sin x = e^{\cos x}$ $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ в) $x^2y' = y^2 - xy$	а) $y'' = 2x^4 + x^3 - 5$ б) $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = -5$ в) $y'' - 7y' = 2e^x$
14.	а) $(x^2+1)y' = y+4$; б) $y' - 2xy = \sin x \cdot e^{x^2}$ $y(0) = -2$ в) $(x-y)y' - y = 0$	а) $y'' = 5x^4 + 2x^3 - 1$ б) $y'' + 8y' + 16y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ в) $y'' - 5y' = 3e^x$
15.	а) $\cos x \cdot y' = y \cdot \sin x$; б) $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \cos x$ $y(0) = -5$ в) $xy' - y = x \cdot \sin\frac{y}{x}$	а) $y'' = \frac{1}{2}x^3 + 2x\ \ -1$ б) $y'' - 7y' + 6y = 0$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ в) $y'' - 5y' + 6y = 2x$
16.	а) $(x^2+1)y' = xy$; б) $xy' - 3y = x + 2$ $y(2) = 2$ в) $\frac{y}{x}y' - \frac{y^2}{x^2} - 4 = 0$	а) $y'' = 5x^2 + 2 - 1$ б) $y'' + y = 0$; $y(0) = -2,\ y'(0) = 0$ в) $y'' + 4y' + 3y = 3x + 1$
17.	а) $e^{3x}y' = y - 3$; б) $y' - 5x^4y = e^{x^5}$ $y(0) = 7$ в) $x^2y' = y^2 - xy$	а) $y'' = -3x^2 + 2\sin x - 2x$ б) $y'' - 6y' = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ в) $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$
18.	а) $x^4y' = 5 - y$;	а) $y'' = -4x^3 - 3\cos x - x + 5$ б) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

	б) $y' - \frac{3y}{x} = x^3 \cdot \sin x$; $y(\frac{\pi}{2}) = -8$ в) $x^2 y' = y^2 - 2xy$	$y(0) = -4,\ y'(0) = 1$ в) $y'' + 9y = 4x$
19.	а) $\cos^2 x \cdot y' = 2y - 1$; б) $y' - ytgx = \frac{1}{\cos^2 x}$ $y(0) = 0$ в) $x^3 y' = y^3 - xy^2$	а) $y'' = -4x^4 + 5\sin 5x + \frac{1}{2}$ б) $y'' + 10y' + 25y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ в) $y'' + 16y = 4 - x$
20.	а) $xyy' = 3 - 2y$; б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ $y(0) = 0$ в) $xy^2 y' + x^2 = y^3$	а) $y'' = 2x^3 + 2\cos 2x - x + 6$ б) $y'' + 3y' - 10y = 0$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ в) $y'' - 4y' = 6e^x$

Решение типовых примеров

Пример 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения $\cos^2 y dx = e^{-2x} dy$.

Решение.

Разделим обе части на $\cos^2 y e^{-2x}$, получим: $\frac{dx}{e^{-2x}} = \frac{dy}{\cos^2 y}$.

Проинтегрируем обе части уравнения: $\int e^{2x} dx = \int \frac{dy}{\cos^2 y}$,

получим $\frac{1}{2} e^{2x} = tgy + c$ - общий интеграл.

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y' - \frac{2}{x+1} y = 0$ при заданных начальных условиях $y(3) = 1$.

Решение.

$y' - \frac{2}{x+1} y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2}{x+1} y$, выразим производную через дифференциалы переменных $y' = \frac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx, получим;

$dy = \frac{2}{x+1} ydx$, далее разделим переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1} dx$.

Интегрируем обе части: $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1} dx \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln|c|$, для упрощенного представления общего решения постоянную C выразили через $\ln|c|$. Применяя свойства логарифмов упростим полученную функцию

$\ln|y| = \ln(|x+1|^2 \cdot c) \Rightarrow y = (x+1)^2 \cdot c$ - общее решение.

Найдем частное решение, для этого подставим в общее решение начальные условия $y(3) = 1$, получим: $1 = (3+1)^2 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{16}$.

Поставляя полученное значение C в общее решение, найдем $y = \frac{1}{16}(x+1)^2$ - частное решение.

Пример 3. Найти общее решение (общий интеграл) линейного дифференциального уравнения первого порядка.

$$y' - yctgx = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, т.е. уравнением вида: $y' + P(x)y = Q(x)$

Для решений уравнений положим: $y = u \cdot v$, где *u*, *v* – независимые функции от *x*, $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение в нашем случае будем иметь:

$u'v + uv' - uv \cdot ctgx = \frac{1}{\sin x}$ или $(u' - uctgx) \cdot v + uv' = \frac{1}{\sin x}$

Подберем функцию $u=u(x)$ так, чтобы выражение в скобке, обращалось в нуль. Для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$получим систему:

$$\begin{cases} u'-uctgx=0 \quad (1) \\ uv'=\dfrac{1}{\sin x} \quad (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) системы определяем функцию $u(x)$, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'-uctgx=0 \Rightarrow \frac{du}{dx}=u\cdot ctgx \Rightarrow \frac{du}{u}=ctgx\cdot dx \Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow$$

$$\ln u=\ln\sin x \Rightarrow u=\sin x$$

Для определения функции $v(x)$, найденное значение функции $u(x)$ подставляем в уравнение(2) системы, получим:

$$\sin x\cdot v'=\frac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow v=-ctgx+c$$

Записываем общее решение данного уравнения в виде $y=u\cdot v$ или $y=\sin x(-ctgx+c) \Rightarrow y=\sin x\left(-\dfrac{\cos x}{\sin x}+c\right) \Rightarrow$

$y=-\cos x+c\sin x$ - общее решение.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y''=x^2-3x+1$

Решение. Последовательно интегрируя два раза данное уравнение, получим:

$$y'=\int(x^2-3x+1)dx=\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+x+c_1$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+x+c_1\right)dx=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$$

Пример 5.

Решить дифференциальные уравнения второго порядка: $(x^3+1)\cdot y''=3x^2\cdot y'$

Решение.

Данное дифференциальное уравнение допускает понижение порядка, не содержит явно функцию y.

Положим $y' = p$, тогда $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$ и уравнение примет вид

$$(x^3+1)\cdot\frac{dp}{dx} = 3x^2\cdot p$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, разделим переменные и проинтегрируем обе части

$$\frac{dp}{p} = \frac{3x^2}{x^3+1}dx,$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{3x^2}{x^3+1}dx,$$

$$\ln|p| = \ln|x^3+1| + \ln|c_1|,$$

где интеграл, стоящий в правой части решаем подстановкой $t = x^3+1$ и приводим к табличному $\int\frac{dt}{t} = \ln|t| + c$.

Применяя свойство логарифма, получим:

$$\ln|p| = \ln|(x^3+1)\cdot c_1| \Rightarrow p = c_1\cdot(x^3+1).$$

Возвращаясь к подстановке, получим:

$$y' = c_1\cdot(x^3+1) \Rightarrow dy = c_1\cdot(x^3+1)dx \Rightarrow \int dy = c_1\int(x^3+1)dx,$$

тогда $y = c_1\cdot\left(\frac{x^4}{4} + x + c_2\right)$ - общее решение.

Пример 6.

а) Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$, которое имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} k_1 = 4; \\ k_2 = 2. \end{array}\right.$

Тогда по таблице 3 (пункт 1), общее решение исходного уравнения этого дифференциального уравнения запишется в виде: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$.

б) Найти частное решение уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

Решение.

Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 16 = 0$ имеет два равных действительных корня $k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4 \Rightarrow k_1 = k_2 = 4$, поэтому общее решение имеет вид: $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

Для нахождения частного решения, найдем производную общего решения

$y = 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + 4C_2 x e^{4x} = e^{4x}(4C_1 + C_2 + 4C_2 x)$.

Подставляя начальные условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$ в выражения для y и y', получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 2 = \tilde{N}_1 e^0 + C_2 0 e^0 \\ 5 = e^0(4C_1 + C_2 + 4C_2 \cdot 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -3 \end{cases}.$$

Подставим решения системы в общее решение:

$y = e^{4x}(2 - 3x)$ - частное решение.

в) Найти общее решение уравнения $y'' - 14y' + 50y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 14k + 50 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $D = 196 - 200 = -4 < 0$, следовательно, оно имеет два комплексных сопряженных корня : $k_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{4i^2}}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k_1 = 7 + i \\ k_2 = 7 - i \end{array} \right.$,

где i – мнимая единица, $i^2 = -1, \alpha = 7, \beta = 1$.

Тогда общее решение уравнения имеет вид: $y = e^{7x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Пример 7.

Найти общее решение линейных неоднородных уравнений:

а) $y'' + 12y' + 36y = 2x - 7$; б) $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$.

Решение.

а) $y'' + 12y' + 36y = 2x - 7$

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид: $Y = y + \overline{y}$, где

y - общее решение соответствующего линейного однородного;

$\overline{y}$ - частное решение линейного неоднородного.

1. Найдем y - общее решение уравнения однородного уравнения $y''+12y'+36y=0$, для этого составим характеристическое уравнение: $k^2+12k+36=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow k_1=k_2=-6$.

Корни действительные равные, следовательно общее решение линейного однородного уравнения имеет вид: $y=e^{-6x}(C_1+C_2x)$.

2.Найдем $\overline{y}$ по виду правой части уравнения, используя таблицу 4. В нашем примере $f(x)=2x-7$, при этом $\alpha=0$ - не является корнем характеристического уравнения $(\alpha \neq k_1 \neq k_2)$, тогда, частное решение $\overline{y}$ будем искать в виде: $\overline{y}=x\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, получим многочлен: $\overline{y}=Ax+B$.

Найдем $\overline{y'}$ и $\overline{y''} \Rightarrow \overline{y'}=A$ и $\overline{y''}=0$.

Подставим полученные выражения для $\overline{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$ в исходное уравнение $y''+12y'+36y=2x-7$, получим:

$0+12A+36(Ax+B)=2x-7 \Rightarrow 12A+36Ax+36B=2x-7$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x*. В результате получим систему уравнении, относительно *A и B*:

$\begin{cases} 36A=2 \\ 12A+36B=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{18} \\ B=-\dfrac{23}{108} \end{cases}$. Подставим полученные значения в частное решение $\overline{y}=Ax+B$, в результате получим: $\overline{y}=\frac{1}{18}x-\frac{23}{108}$.

3) Поставим полученные решения $y,\overline{y}$ в уравнение $Y=y+\overline{y}$.

$Y=e^{-6x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{18}x-\frac{23}{108}$ - общее решение неоднородного линейного уравнения.

б) $y''-y'-6y=10e^{3x}$.

Решение.

1.Найдем y - общее решение уравнения однородного уравнения $y''-y'-6y=0$, для этого составим характеристическое уравнение:

$k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow D = 25 \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 3$.

Корни действительные различные, следовательно (таблица 3, пункт 1) общее решение линейного однородного имеет вид: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

2. Найдем $\overline{y}$ по виду правой части уравнения, используя таблицу 4.

В нашем примере $f(x) = 10e^{3x}$, при этом $\alpha = 3$- совпадает с одним из корней характеристического уравнения$(\alpha = k_2 = 3)$, частное решение $\overline{y}$ будем искать в виде $\overline{y} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, получим выражение:

$\overline{y} = xAe^{3x}$. Найдем $\overline{y'}$ и $\overline{y''}$:

$$\overline{y}' = \left(xA \cdot e^{3x}\right)' = A\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right) = Ae^{3x} + A \cdot 3 \cdot x \cdot e^{3x}$$

$$\overline{y}'' = 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

Подставим полученные выражения: $\overline{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$ в исходное уравнение $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$, получим:

$$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - Ae^{3x} - 6Axe^{3x} = 10e^{3x} \Rightarrow 5Ae^{3x} = 10e^{3x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5A = 10 \Rightarrow A = 2$$

3) Поставим полученные решения $y, \overline{y}$ в уравнение $Y = y + \overline{y}$.

$Y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + 2x \cdot e^{3x}$ - общее решение неоднородного линейного уравнения.

Глава 5. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

5.1 Вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение функции двух переменных, её области определения. График функции двух переменных.
2. Определение частной производной первого порядка функции двух переменных по любому из независимых переменных. Сформулируйте правила нахождения частных производных первого порядка.
3. Определение полного дифференциала и полного приращения функции двух переменных?

4. Дайте определение частных производных второго порядка и сформулируйте правила их нахождения и теорему о равенстве смешанных производных.
5. Каким образом находится производная в направлении вектора $\bar{s}$.
6. Какое направление показывает градиент? Как найти координаты градиента?
7. Дайте определение точек максимума и минимума для функции двух переменных. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точек экстремума для функции двух переменных.
8. Сформулируйте правило нахождения точек экстремума для функции двух переменных.
9. Какой вид имеют: производственная функция; функция прибыли; функция издержек?
10. Каким образом вычислить максимальную прибыль ?

5.2. Задания для самостоятельного решения.

<u>Контрольная работа № 5 по теме:«Функция двух переменных».</u>

Задание №1.

Найти область определения функции $z = f(x;y)$.

1. $z = \ln(2x - y)$	**11.** $z = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + y}}$
2. $z = \sqrt{2x - y - 1}$	**12.** $z = \ln(2x^2 - y)$
3. $z = \dfrac{3}{\sqrt{x - 3y}}$	**13.** $z = \sqrt{x - 2y + 3}$
4. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$	**14.** $z = \sqrt{6x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$
5. $z = \ln(x^2 + y^2 - 25)$	**15.** $z = \lg(x^2 - y)$
6. $z = \ln(2x - y)$	**16.** $z = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + y}}$
7. $z = \sqrt{2x - y - 1}$	**17.** $z = \ln(2x^2 - y)$

8. $z = \dfrac{3}{\sqrt{x-3y}}$	**18.** $z = \sqrt{x-2y+3}$
9. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$	**19.** $z = \sqrt{6x} + \dfrac{2}{\sqrt{y}}$
10. $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 25\right)$	**20.** $z = \lg\left(x^2 - y\right)$

Задание №2.

Даны функции $z = f(x; y)$. Найти:

а) полный дифференциал в точке P;

б) частные производные второго порядка;

в) частные производные первого порядка.

1. **а)** $z = tgx + x^2 y + \sin y - 1$; ***P(0;0)*** **б)** $z = 3xy^2 + 2x^3 y^4 - 2x$ **в)** $z = \sqrt{x^2 - xy^3}$	**11.** **а)** $z = y^2 \sin x + x^5 y - 4y^3 x^2 - 8$; ***P(0;1)*** **б)** $z = 2x^3 y + 2x^2 y^3 + 5y - 1$ **в)** $z = e^{x^3 - xy}$
2. **а)** $z = y \ln x - 8x^2 y^2 + \dfrac{1}{y}$; ***P(1;-1)*** **б)** $z = 2x^2 y^3 + 3x^3 y - 2y - 1$ **в)** $z = \ln(2x^2 y - y)$	**12.** **а)** $z = 2y^3 e^x - 3xy^2 + \dfrac{1}{4} y^4 x + 7y$; ***P(0;-1)*** **б)** $z = -x^2 y^3 + 2x^2 y + 5x - 7$ **в)** $z = \ln(xy - 2x)$
3. **а)** $z = y \cos x + x^5 y - y^3 - 8$; ***P(0;-1)*** **б)** $z = x^2 y^4 + 2x y - 4x - 1$ **в)** $z = \cos(x^2 y - 3y)$	**13.** **а)** $z = 4x y^3 + 3x^2 y + x^2 \sin y - 1$; ***P(1;0)*** **б)** $z = -3x y^2 + 2x^2 y^3 - 6y - 2$ **в)** $z = tg(x^2 - 2y)$
4. **а)** $z = x^3/3 + 4xy^2 - 3\sqrt{x}y^3$; ***P(4;1)*** **б)** $z = 3x y^2 + 2x^2 y - 5y - 3$ **в)** $z = \sin(x y^2 + 3x)$	**14.** **а)** $z = 7x^2 y^5 - x^3 y + x \cos y - 2x$; ***P(1;0)*** **б)** $z = 4x^2 y - x y^3 - 6y - 2$ **в)** $z = \cos(x^2 y + 2x)$
5. **а)** $z = \ln x - 8x^2 y^2 + \dfrac{x}{y} + 4x - 3$; ***P(1;1)***	**15.** **а)** $z = 2y^3 e^{5x} - 2x^2 y - 4y^4 - 5x$; ***P(0;1)*** **б)** $z = x y^4 + 4x^2 y^3 + 2x + 5$

б) $z = 5x^3y^2 + 2x\ y^3 + 4x - 4$ **в)** $z = (x\ y^2 + 3x)^5$	**в)** $z = (x\ y^3 - 2x)^5$
6. **а)** $z = tgx\ + x^2y + \sin y\ - 1$ **; P(0;0)** **б)** $z = 3xy^2 + 2x^3y^4 - 2x$ **в)** $z = \sqrt{x^2 - xy^3}$	**16.** **а)** $z = y^2 \sin x\ + x^5y - 4y^3x^2 - 8$ **; P(0;1)** **б)** $z = 2x^3y\ + 2x^2y^3 + 5y - 1$ **в)** $z = e^{x^3 - xy}$
7. **а)** $z = y\ln x\ - 8x^2y^2 + \frac{1}{y}$ **; P(1;-1)** **б)** $z = 2x^2y^3 + 3x^3y\ - 2y - 1$ **в)** $z = \ln(2x^2y - y)$	**17.** **а)** $z = 2y^3e^x - 3xy^2 + \frac{1}{4}y^4x + 7y$ **; P(0;-1)** **б)** $z = -x^2y^3 + 2x^2y\ + 5x - 7$ **в)** $z = \ln(xy - 2x)$
8. **а)** $z = y\cos x\ + x^5y - y^3 - 8$ **; P(0;-1)** **б)** $z = x^2y^4 + 2x\ y\ - 4x - 1$ **в)** $z = \cos(x^2y - 3y)$	**18.** **а)** $z = 4x\ y^3 + 3x^2y + x^2\sin y\ - 1$ **; P(1;0)** **б)** $z = -3x\ y^2 + 2x^2y^3 - 6y - 2$ **в)** $z = tg(x^2 - 2y)$
9. **а)** $z = x^3/3 + 4xy^2 - 3\sqrt{x}y^3$ **; P(4;1)** **б)** $z = 3x\ y^2 + 2x^2y\ - 5y - 3$ **в)** $z = \sin(x\ y^2 + 3x)$	**19.** **а)** $z = 7x^2y^5 - x^3y + x\cos y - 2x$ **; P(1;0)** **б)** $z = 4x^2y\ - x\ y^3 - 6y - 2$ **в)** $z = \cos(x^2y + 2x)$
10. **а)** $z = \ln x\ - 8x^2y^2 + \frac{x}{y} + 4x - 3$ **; P(1;1)** **б)** $z = 5x^3y^2 + 2x\ y^3 + 4x - 4$ **в)** $z = (x\ y^2 + 3x)^5$	**20.** **а)** $z = 2y^3e^{5x} - 2x^2y\ - 4y^4 - 5x$ **; P(0;1)** **б)** $z = x\ y^4 + 4x^2y^3 + 2x + 5$ **в)** $z = (x\ y^3 - 2x)^5$

Задание №3.

Дана функция $z = f(x;y)$. Найти:

1) градиент функции в точке A;
2) производную функции по направлению градиента;
3) точки экстремума функций.

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	***A(1;2)***	**11.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	***A(0;3)***
2. $z = xy - y^2 - x^2 + 1$	***A(2;2)***	**12.** $z = 4 - 5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y$	***A(1;2)***
3. $z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	***A(0;1)***	**13.** $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y$	***A(1;1)***
4. $z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$	***A(0;-2)***	**14.** $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 5$	***A(-2;2)***
5. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	***A(-1;4)***	**15.** $z = x^3 - 6xy + 2y^3 + 9$	***A(2;0)***
6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	***A(1;2)***	**16.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	***A(0;3)***
7. $z = xy - y^2 - x^2 + 1$	***A(2;2)***	**17.** $z = 4 - 5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y$	***A(1;2)***
8. $z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	***A(0;1)***	**18.** $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y$	***A(1;1)***
9. $z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$	***A(0;-2)***	**19.** $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 5$	***A(-2;2)***
10. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	***A(-1;4)***	**20.** $z = x^3 - 6xy + 2y^3 + 9$	***A(2;0)***

Решение типового примера.

Пример 1.
Найти область определения следующих функций:

а) $z = x^2 - 2xy + 6$; б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; г) $z = \ln(4 - y + 3x^2)$.

Решение.

а) Данная функция определена на всей плоскости *XOY*, следовательно, *D(Z)={XOY}*.

б) Данная функция определена, если $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$.

Запишем неравенство в виде уравнения $x^2 + y^2 = 4$ - граница области определения, которая на плоскости определяет окружность с центром в точке *O(0;0)* и радиусом *R*=2. Окружность делит всю плоскость *XOY* на внешнюю и внутреннюю ее части. Для определения какая часть является областью определения возьмем любую точку, например *O(0;0)* и подставим в неравенство $4-x^2-y^2 \geq 0$. Получим $4-0-0 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 0$- истинно.

Точка *O(0;0)* принадлежит внутренней части окружности, следовательно областью определения данной функции является круг и его граница (рис. 8).

Замечание 1: если граница принадлежит области определения, то ее изображают сплошной линией, если нет то пунктирной. В нашем случае линия сплошная.

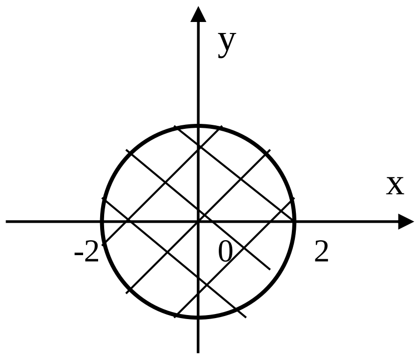


Рисунок 8

в) Данная функция определена, если выражение под знаком логарифма положительно, т.е. $4-y+3x^2>0$ или $y<4+3x^2$. Таким образом границей области определения является парабола $y=4+3x^2$ с вершиной *(0,4)*, ветви вверх. Областью определения функции являются точки, лежащие внутри параболы (рис.9). Граница области принадлежит области определения.

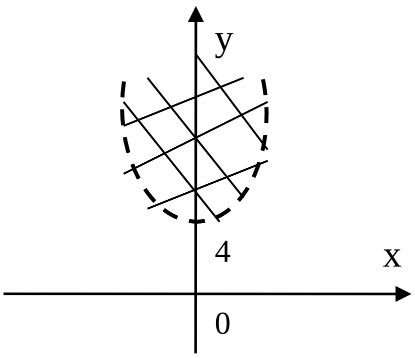


Рисунок 9.

Пример 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z=x^2+xy+y^3-7$; б) $z=\sqrt{x+4y}$; в) $z=\ln(x\cdot y^2)-e^{\frac{x}{y}}$.

Решение.

а) $z=x^2+xy+y^3-7$

Считая y постоянным, получим: $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.}=2x+1\cdot y+0=2x+y$

Считая x постоянным, получим: $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.}=x\cdot 1+3y^2-0=x+3y^2$.

б) $z=\sqrt{x+4y}$ - функция сложная.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = \frac{1}{2\sqrt{x+4y}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+4y}};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = \frac{1}{2\sqrt{x+4y}} \cdot 4 = \frac{4}{2\sqrt{x+4y}}.$$

в) $z = \ln(x \cdot y^2) - e^{\frac{x}{y}}$ - сумма двух сложных функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = \frac{1}{x \cdot y^2} \cdot 1 \cdot y^2 - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \cdot e^{\frac{x}{y}};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = \frac{1}{x \cdot y^2} \cdot x \cdot 2y \;\; - e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{x}{y}}.$$

Пример 3. Вычислить полный дифференциал функции $z = x^4 - 2x^2y^2 + y$ в точке *M(1;2)*.

Решение.

Для нахождения полного дифференциала функции $z = x^4 - 2x^2y^2 + y$ в точке *M(1;2)*, воспользуемся формулой (4.3). Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = 4x^3 - 4xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = -4x^2y + 1$$

Вычислим значения частных производных в точке *M(1;2)*:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1;2).} = 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 \cdot 2^2 = -12 \;; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1;2)} = -4 \cdot 1^2 \cdot 2 + 1 = -7.$$

Согласно формуле (4. 4), получим: $dz = -12dx - 7dy$.

Пример 4. Вычислить частные производные второго порядка от функции $z = x^4 \cdot y + e^x \cdot y^2$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y-пост.} = 4x^3y + e^x \cdot y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x-пост.} = x^4 + 2e^x \cdot y \;.$$

Последовательно найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4x^3y + e^xy^2\right)'_x = 12x^2y + e^xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x^4 + 2e^xy\right)'_y = 2e^x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \left(4x^3 + e^x y^2\right)'_y = 4x^3 + 2e^x y; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x^4 + 2e^x\right)'_x = 4x^3 + 2e^x y \cdot$$

Из примера видно, что смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}$ равны.

Справедлива следующая теорема: если функция $z = f(x;y)$ и её частные производные определены и непрерывны в точке *M(x;y)* и в некоторой её окрестности, то в этой точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}.$$

Пример 5. Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$, точка $A(1;-2)$.
Требуется:
1. найти градиент функции в точке *A*;
2. найти производную функции в точке *A* по направлению градиента

Решение.

1) Градиент функции находится по формуле:

$$\overrightarrow{grad}\, z(x;y) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}$$

Подставим найденные частные производные, получим

$$\overrightarrow{grad}\, z(x;y) = (-2x - y + 6) \cdot \vec{i} + (-x - 2y) \cdot \vec{j}.$$

Вычислим градиент в точке $A(1;-2)$

$$\overrightarrow{grad}\, A = (-2 \cdot 1 - (-2) + 6) \cdot \vec{i} + (-1 - 2 \cdot (-2)) \cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, A = 6\vec{i} + 3\vec{j}.$$

2) Производная по направлению в точке, выражается через частные производные функции по формуле (4.7):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta.$$

$\cos\alpha$ и $\cos\beta$ - направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, в нашем случае вектор $\vec{s}$ совпадает с $\overrightarrow{grad}\, z$.

Найдем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \qquad \cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставим полученные выражения, получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = 6\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

Пример 6.

Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$, исследовать данную функцию на экстремум.

Решение.

Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию на экстремум необходимо выполнить следующие действия:

1) Найдем частные производные первого порядка, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять к нулю и решить систему уравнений, решением которой являются стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Следовательно, заданная функция имеет только одну стационарную точку *P(4,-2)*.

2) Найдем частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных *x* и *y*, следовательно, постоянны в любой точке. Поэтому для точки *P(4,-2)* имеем

A=-2;B=-1;C=-2.

Составим и вычислим дискриминант:

$D = AC - B^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 3$

Для данной функции $D > 0$ и $A<0$, следовательно, в точке *P(4,-2)* имеем максимум.

д) Найдем значение функции:

$z_{\max} = z(4;-2) = -(4^2) - 4\cdot(-2) - (-2)^2 + 6\cdot 4 - 4 = 8.$

Литература

1.Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление: учеб пособие / под ред. И.М. Петрушко. – СПб.: Лань, 2008. – 608 с.МО

2.Курс высшей математики. Интегральные исчисления. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / под ред. И.М. Петрушко. – СПб.: Лань, 2008. – 608 с.МО

3.Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 11-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 608 с.

4.Сборник задач по высшей математике: 1 курс / К.Н. Лунгу и др. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

5. Михеев, В.И. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.И. Михеев. – Электрон. дан. – М.: Физматлит, 2007. – 200 с. - Режим доступа: www.e.lanbook.com.

Содержание

Методические указания

Савельева Екатерина Владимировна.

Тюрина Елена Александровна

Математика. Часть 1.Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для студентов направлений подготовки: 20.03.02–«Природообустройство и водопользование», 21.0.3.02 –«Землеустройство и кадастры»,35.03.06 – «Агроинженерия».

Подписано в печать ____________2016г.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать RISOGRAPH TR 1510. Уч.-изд.л.3,8

Тираж 30 экз. Заказ №

ФГБОУ ВО

«Приморская государственная сельскохозяйственная академия».

692510. г. Уссурийск, пр. Блюхера,44.

Участок оперативной полиграфии ФГБОУ ВО ПГСХА

692500. г. Уссурийск, ул. Раздольная, 8.

Created in Master PDF Editor - Demo Version