Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Приморская государственная сельскохозяйственная академия»
Институт землеустройства и агротехнологий

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки 06.03.01 Биология

Электронное издание

Уссурийск, 2022

Составитель: Савельева Е.В., канд. техн. наук, доцент кафедры физики и высшей математики; Островская И.Э., старший преподаватель кафедры физики и высшей математики.

Рецензент: Л.Д. Ердакова, к. пед. н., доцент ДВГУПС Приморского железнодорожного транспорта (филиал ДВГУПС в г. Уссурийске).

Высшая математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки 06.03.01 Биология [Электронный ресурс]: / Е.В. Савельева, И.Э. Островская; ФГБОУ ВО ПГСХА.
- Электрон. текст дан. - Уссурийск: ПГСХА, 2022.- 56 с. - Режим доступа: www. de.primacad.ru.

Методические указания составлены по направлению подготовки 06.03.01 Биология, содержат контрольные задания для самостоятельной работы обучающихся и методические указания по их выполнению.

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО «Приморская государственная сельскохозяйственная академия».

Введение

Математика играет важную роль в подготовке специалистов аграрной промышленности. Применение математического аппарата необходимо для решения теоретических, практических задач в аграрных науках (оптимизационные задачи производства, моделирование различных технологических процессов). Методы теории вероятности, математической статистики широко применяются при планировании опытов, обработке их результатов. Эти методы позволяют с нужной степенью достоверности анализировать результаты практической деятельности в различных областях сельскохозяйственного производства.

Общие методические указания

Перед выполнением контрольной работы, обучающийся должен изучить соответствующие разделы рекомендуемой литературы и может воспользоваться решениями типовых задач, содержащихся в методических указаниях.

Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради. На внешней обложке тетради должны быть указаны номер контрольной работы, полный учебный шифр, фамилия и инициалы обучающегося.

Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Все вычисления необходимо делать полностью. Рекомендуется делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении.

Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно, четко, с указанием единиц масштаба, координатных осей, обозначения к задачам должны соответствовать указаниям на чертеже.

Обучающийся по направлению выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9), то номера задач соответствующего варианта даны в таблице 1.

Если предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2.

Таблица 1.

Номер варианта	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9),											
1	1	11	21	31	41	51	81	91	101	111	121	131
2	2	12	22	32	42	52	82	92	102	112	122	132
3	3	13	23	33	43	53	83	93	103	113	123	133
4	4	14	24	34	44	54	84	94	104	114	124	134
5	5	15	25	35	45	55	85	95	105	115	125	135
6	6	16	26	36	46	56	86	96	106	116	126	136
7	7	17	27	37	47	57	87	97	107	117	127	137
8	8	18	28	38	48	58	88	98	108	118	128	138
9	9	19	29	39	49	59	89	99	109	119	129	139
10	10	20	30	40	50	60	90	100	110	120	130	140

Таблица 2.

Номер варианта	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0),											
1	2	13	24	35	45	56	87	98	109	113	128	140
2	3	14	25	36	46	57	88	99	110	114	123	144
3	4	15	26	37	48	58	89	100	101	115	126	143
4	5	16	27	38	43	59	90	91	102	116	130	148
5	6	17	28	39	41	60	81	92	103	117	121	142
6	7	18	29	40	50	51	82	93	104	118	127	146
7	8	19	30	31	44	52	83	94	105	119	124	149
8	9	20	21	32	49	53	84	95	106	120	122	141
9	10	11	22	33	47	54	85	96	107	111	125	145
10	1	12	23	34	42	55	86	97	108	112	129	147

Литература

1. Высшая математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие/ сост. Е.В. Савельева; ФГБОУ ВПО ПГСХА. - Электрон. текст. дан. - Уссурийск: ФГБОУ ВПО ПГСХА, 2013. - 116 с. - Режим доступа: www.elib.primacad.ru.
2. Зайцев, И.А. Высшая математика [Текст]: учебник/ И.А. Зайцев. - 4-е изд., стер. - М.: Дрофа, 2005. - 398 с.
3. Малыхин, В.И. Высшая математика [Текст]: учебное пособие/ Малыхин В.И. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ИНФРА-М, 2006. - 365 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст]: [учеб. пособие]/ Д.Т. Письменный. - 13- изд. - М.: АЙРИС-пресс, 2015. - 608 с.
5. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс [Текст]: [учеб. пособие для студентов вузов]/ К.Н. Лунгу [и др.] - 9-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 576 с.

Задачи и методические указания к выполнению контрольных работ.

В задачах 1-10 решить систему линейных уравнений, пользуясь формулами Крамера. Сделать проверку найденного решения.

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + 4z = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = -7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + y - z = -7 \\ x - 5y + 2z = 2 \end{cases}$

<u>Решение типовой задачи</u>

<u>Задача.</u>Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 8x - 3y + 6z = -2 \end{cases}$$

Решение.

а) Для решения заданной системы линейных уравнений воспользуемся формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Составим и вычислим главный определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-6-(-9)) - 1 \cdot (24-24) + 1 \cdot (-12-(-8)) = 2$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Для его отыскания вычислим вспомогательные определители $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Для вычисления Δx в главном определителе первую строку заменим строкой свободных членов, для вычисления Δy и Δz соответственно вторую и третью.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-6+9) - (6+6) + (-3-2) = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(6+6) - 7(24-24) + (-8-8) = 8$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2+3) - (-8-8) + 7(-12+8) = -2$$

По формулам Крамера получим:

$$x = \frac{4}{2} = 2; \qquad y = \frac{8}{2} = 4; \qquad z = \frac{-2}{2} = -1.$$

Проверим правильность полученного решения, подставив его в каждое уравнение заданной системы:

$$\begin{matrix} 2\cdot 2+4-1=7 & & 7=7 \\ 4\cdot 2-4+3\cdot(-1)=1 & \Rightarrow & 1=1 \\ 8\cdot 2-3\cdot 4+6\cdot(-1)=-2 & & -2=-2 \end{matrix}.$$

Получили три верных равенства, система решена правильно.

В задачах 11-20 даны координаты вершин треугольника АВС.

Найти: 1. длину стороны АВ;

2. уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты.

3. угол при вершине В в радианах с точностью до двух знаков;

4. уравнение медианы АЕ

5. уравнение и длину высоты СД;

6. сделать чертеж.

11. A(-1; 5), B(11; 0), C(17; 8)
12. A(6; 5), B(-6; 0), C(-10; 3)
13. A(-2; 6), B(10; 1), C(16; 9)
14. A(10; -1), B(-2; -6), C(-6; -3)
15. A(-1; 7), B(11; 2), C(17; 10)
16. A(-2; -6), B(-3; 5), C(4; 0)
17. A(2; -3), B(-1; -6), C(0; 1)
18. A(0; 2), B(-7; 4), C(3; 2)
19. A(-5; 7), B(7; -2), C(11; 20)
20. A(-8; -3), B(4; -12), C(8; 10)

<u>Решение типовой задачи</u>

<u>Задача.</u> Даны координаты вершин треугольника АВС: А(4;3), В(16;-6), С(20;16).

Найти: 1) длину стороны АВ;

2) уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты;

3) угол при вершине В в радианах с точностью до двух знаков;

4) уравнение высоты СД;

5) уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД;

6) сделать чертеж.

Решение.

1) Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны AB:

$$AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек A и B, получим уравнение стороны AB:

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \quad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \quad \frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4};$$

$4y-12=-3x+12$; $3x+4y-24=0$ (AB).

Решив последнее уравнение относительно y, находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$4y=-3x+24$; $y = -\frac{3}{4} + 6$, откуда $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Подставив в (2) координаты точек B и C, получим уравнение прямой BC:

$11x-2y-188=0$ (BC), или $y=5{,}5x-94$, откуда $k_{BC} = 5{,}5$.

3) Известно, что тангенс угла ϕ между двумя прямыми, угловые коэффициенты, которых соответственно равны k_1 и k_2 вычисляется по формуле

$$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (3)$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $k_{BC} = 5{,}5$. Применяя (3), получим

$$tgB = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}k_{BC}} = \frac{-\frac{3}{4} - 5{,}5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5{,}5} = \frac{-25}{5 - 16{,}5} = 2;\ B \approx 63^0 26',\ \text{или}\ B \approx 1{,}11\ рад.$$

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид

$$y - y_1 = k\left(x - x_1\right) \qquad (4)$$

Высота CD перпендикулярна стороне AB. Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD, воспользуемся условием перпендикулярности прямых $k_2 = -1/k_1$. Так как $k_{AB} = -3/4$, то $k_{CD} = 4/3$. Подставив в (4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим

$$y - 16 = \frac{4}{3}\left(x - 20\right);\ \ 3y - 48 = 4x - 80;\ \ 4x - 3y - 32 = 0\ \ (CD).$$

5) Чтобы найти уравнение медианы AE, определим сначала координаты точки E, которая является серединой стороны BC, применяя формулы деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (5)$$

Следовательно,

$$x_E = \frac{16 + 20}{2} = 18;\quad y_E = \frac{-6 + 16}{2} = 5;\ \ E(18;5).$$

Подставив в (2) координаты точек A и E, находим уравнение медианы:

$$\frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{x - 4}{18 - 4};\qquad \frac{y - 3}{2} = \frac{x - 4}{14};$$

$$x - 7y + 17 = 0\ \ (AE).$$

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты CD и медианы AE, решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x-3y-32=0, \\ x-7y+17=0 \end{cases} \Rightarrow x=11,\ y=4;\ K(11;4).$$

6) Построение.

Треугольник *ABC*, высота *CD*, медиана *AE*, прямая *KF* и точка *M* построим в системе координат *xOy* на рисунке 1.

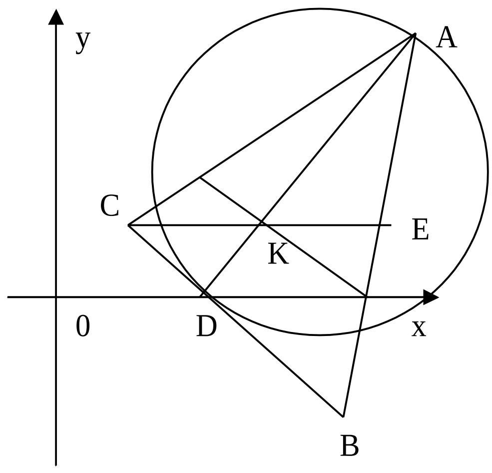

Рисунок 1

В задачах 21-30 найти указанные пределы.

21. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2}{3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4+3x-x^2}{2x^2+x-1}$

3) $\lim\dfrac{5x^2-2x}{x^2+4x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x}$

22. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^3}{5+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4-3x-x^2}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2}{x^3-2x-5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$

23. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{5x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{1-x-2x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5x+x^2}{3x+8x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tgx}{5x}$

24. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+9}{2x+5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10-x-2x^2}{x^2-3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x-x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{2x}$

25. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x}{1-x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-14}{x^2-4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+x^2-5x^3}{x^2-x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,\frac{x}{2}}{3x}$

26. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x-x^2}{x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2}{3x}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-5}{2x^2+3x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{tg\,\frac{x}{3}}$

27. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-x}{x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^3-4x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x+x^2}{2x-x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{tg\,6x}$

28. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x-x^2}{3+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-x-3x^2}{x^2+x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x^2-4x^3}{x+x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tgx}{7x}$

29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-1}{x+8}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x-14}{2-3x-2x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{x^2+8x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin 5x}$

30 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-25x}{x+7}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x-4}{x^3-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+5x^2}{4x+x^3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg\,\frac{2x}{3}}$

<u>Решение типовой задачи</u>

<u>Задача.</u> Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4x+x^2}{5-x}$

Решение. На основании основных теорем о пределах имеем $\lim\limits_{x\to a} f(x)= f(a)$, поэтому подставим вместо переменной x её предельное значение (-4):

$$\lim_{x\to -4}\frac{4x+x^2}{5-x}=\frac{4(-4)+(-4)^2}{5-(-4)}=\frac{-16+16}{5+4}=\frac{0}{9}=0$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10+x-3x^2}{x^3-4x}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10+x-3x^2}{x^3-4x}=\dfrac{10+2-3\cdot 2^2}{2^3-4\cdot 2}=\dfrac{12-12}{8-8}=\dfrac{0}{0}$

При подстановке вместо переменной x её предельного значения получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. При $x\to 2$ и числитель и знаменатель – бесконечно малые величины.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, необходимо числитель и знаменатель разложить на простые множители. Квадратный трехчлен разлагаем по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена.

Корни квадратного трехчлена будем находить по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где дискриминант $D=b^2-4ac$.

Для числителя имеем: $10+x-3x^2=-3x^2+x+10$

$$D=b^2-4ac=1^2-4(-3)\cdot 10=1+120=121$$

По формуле корней получим

$$x_1=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{121}}{-2\cdot 3}=\frac{-1-11}{-6}=2$$

$$x_2=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{121}}{-6}=\frac{-1+11}{-6}=\frac{10}{-6}=-\frac{5}{3}$$

Следовательно, $10+x-3x^2=-3x^2+x+10=-3(x-2)\left(x+\frac{5}{3}\right)$.

Для знаменателя вынесем общий множитель и воспользуемся формулой сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Получим: $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$.

Теперь условие задачи записываем в следующем виде:

$$\lim_{x\to 2}\frac{10+x-3x^2}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{-3\cancel{(x-2)}\left(x+\frac{5}{3}\right)}{x\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-3x-5}{x(x+2)}=\frac{-3\cdot 2-5}{2(2+2)}=$$

$$=\frac{-6-5}{2\cdot 4}=-\frac{11}{8}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$

<u>Решение.</u> Если вместо переменной x подставить ее предельное значение, то получим в числителе и знаменателе бесконечно большую величину, так как по условию $x\to\infty$, то есть получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Избавиться от неопределенности этого типа можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$=\frac{4-\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{2-\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty^2}}=\frac{4-0+0}{2-0-0}=\frac{4}{2}=2$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,\frac{x}{3}}{6x}$$

<u>Решение.</u> Подстановка предельного значения переменной x дает неопределенность $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,\frac{x}{3}}{6x}=\frac{tg\,\frac{0}{3}}{6\cdot 0}=\frac{tg0}{0}=\frac{0}{0}$$

Чтобы освободиться от неопределенности в данном случае, необходимо использовать первый замечательный предел, одно из его следствий и эквивалентность бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{tgax}{ax}=1\Rightarrow \sin ax\sim ax,\ tgax\sim ax$$

Преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,\frac{x}{3}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}1}{3\cdot 6\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{18}=\frac{1}{18}.$$

В задачах 31-40 найти производные и дифференциалы заданных функций:

31. 1) $y=3x^4-\frac{5}{3x^3}-9\sqrt[3]{x^2}-1$ 3) $y=(x^3+1)\cdot\ln(x+1)$

2) $y=\frac{arctgx}{1+x^2}$ 4) $y=e^{\sin 5x}$

32. 1) $y=2x^5-\frac{1}{3x^3}+4\sqrt[4]{x}$ 3) $y=\frac{2^x}{arcctgx}$

2) $y=(x^2-2)\sin x$ 4) $y=\sqrt[4]{x^3+\ln x}$

33. 1) $y=4x^2-\frac{5}{6x^6}+10\sqrt[5]{x^4}+2$ 3) $y=\frac{e^x}{2x+1}$

2) $y=(1-x^2)ctgx$ 4) $y=\ln(x^2+5)$

34. 1) $y = 3x^5 - \dfrac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{2}$ 3) $y = \dfrac{\arccos x}{x^3 - 1}$

2) $y = 5^x \cdot tgx$ 4) $y = \sqrt{x^3 + \sin 3x}$

35. 1) $y = 3x + \dfrac{4}{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 1$ 3) $y = \dfrac{\sin 2x}{x - 3}$

2) $y = \left(x^2 + 1\right) arctgx$ 4) $y = \left(\ln x - \cos 3x\right)^2$

36. 1) $y = 5x^2 - \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{3}$ 3) $y = \dfrac{\ln x}{2 - x^2}$

2) $y = \left(x + 3\right)\arcsin x$ 4) $y = \left(e^{3x} - \sin 3x\right)^3$

37. 1) $y = 4x^2 - \dfrac{3}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^3} - \dfrac{1}{3}$ 3) $y = \dfrac{\cos x}{x^2 - 2x}$

2) $y = e^{2x}\left(x^3 - 1\right)$ 4) $y = \left(\ln \sin x - x\right)^3$

38. 1) $y = x^5 + \dfrac{1}{2x^2} - 4\sqrt{x} + 3$ 3) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

2) $y = \left(4x^2 + 1\right) \cdot ctgx$ 4) $y = \left(x^3 - \ln x\right)^3$

39. 1) $y = 2x^3 - \dfrac{2}{3x^6} + 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{4}$ 3) $y = \dfrac{\cos 3x}{x + \sin x}$

2) $y = \left(x + e^x\right)\arcsin x$ 4) $y = \ln tg\, 2x$

40. 1) $y = 5x^6 - \dfrac{3}{2x^4} + 8\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{1}{5}$ 3) $y = \dfrac{x + 2}{\ln x}$

2) $y = x^3 \arccos x$ 4) $y = \left(3x^2 + e^{2x}\right)^4$

При решении задач 11-20 используйте основные правила и формулы дифференцирования.

№ n/n	функция	производная
1.	$y = const$	$y' = 0$
2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = u + \upsilon - \omega$	$y' = u' + \upsilon' + \omega'$
4.	$y = u \cdot$	$y' = u'\upsilon + u\upsilon'$
5.	$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$

6.	$y = \frac{u}{\upsilon}$	$y' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$
7.	$y = f(u), u = \phi(x)$	$y' = y'_u \cdot u'_x$
8.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
9.	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
10.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
11.	$y = e^x$	$y' = e^x$
12.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
13.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
14.	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
15.	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
16.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
19.	$y = arcctgx$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$

Решение типовой задачи

Задача. Найти производные и дифференциалы заданных функций:

1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2x^4} + 8\sqrt[3]{x} + 2$

Решение. Воспользуемся формулой производной степенной функции и правилом дифференцирования алгебраической суммы:

$$(x^n)' = nx^{n-1};\ (u + \upsilon - \omega)' = u' + \upsilon' - \omega'$$

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^{-4} + 8x^{\frac{1}{3}} + 2$$

$$y' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5}{2}x^{-4}\right)' + \left(8x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2'$$

Далее будем использовать следующие формулы:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'; \ (const)' = 0$$

$$y' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' - \frac{5}{2}\left(x^{-4}\right)' + 8\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2}(-4)x^{-5} + 8 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= x^2 + \frac{10}{x^5} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Дифференциал функции равен $dy = y' \cdot dx$, поэтому $dy = \left(x^2 + \frac{10}{x^5} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

2) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot \sin x$

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой производной произведения двух функций:

$$(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'; \ (\sin x)' = \cos x$$

$$y' = \left(\left(x^2 + 1\right) \cdot \sin x\right)' = \left(x^2 + 1\right)' \cdot \sin x + \left(x^2 + 1\right) \cdot (\sin x)' = (2x + 0) \cdot \sin x + \left(x^2 + 1\right) \cdot \cos x =$$
$$= 2x \cdot \sin x + \left(x^2 + 1\right)\cos x$$

$$dy = \left(2x \cdot \sin x + \left(x^2 + 1\right)\cos x\right)dx$$

3) $y = \dfrac{\arcsin x}{x^2 + e^x}$

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой производной частного двух функций:

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}; \ \left(e^x\right)' = e^x; \ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x^2 + e^x}\right)' = \frac{(\arcsin x)'\left(x^2 + e^x\right) - \arcsin x \cdot \left(x^2 + e^x\right)'}{\left(x^2 + e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2 + e^x\right) - \arcsin\left(2x + e^x\right)}{\left(x^2 + e^x\right)^2} = \frac{\left(x^2 + e^x\right) - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x\left(2x + e^x\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(x^2 + e^x\right)^2}$$

$$dy = \frac{\left(x^2 + e^x\right) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x\left(2x + e^x\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(x + e^x\right)^2}dx$$

4) $y = \left(x^2 - arctgx\right)^4$

Решение. Данная функция является сложной степенной, она может быть представлена так: $y = u^4$, где $u = x^2 - arctgx$. Применяя формулу $y' = \left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$y' = 4 \cdot \left(x^2 - arctdx\right)^3 \cdot \left(x^2 - arctdx\right)' = 4\left(x^2 - arctgx\right)^3 \cdot \left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$dy = 4\left(x^2 - arctgx\right)^3 \cdot \left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

5) $y = \ln\left(x^2 + 3x\right)$

Решение. Имеем сложную логарифмическую функцию $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$.

Производная заданной функции:

$$y' = \left(\ln\left(x^2 + 3x\right)\right)' = \frac{1}{x^2 + 3x}\left(x^2 + 3x\right)' = \frac{1}{x^2 + 3x}\left(2x + 3 \cdot 1\right) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

Дифференциал функции равен: $dy = y'dx$

$$dy = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}dx$$

В задачах 41-50 исследовать заданные функции методом дифференцированного исчисления и начертить их графики. Исследование функций провести по следующей схеме:

1) найти область определения функции;

2) определить интервалы монотонности и экстремумы функции;

3) определить интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба;

4) для построения графика, найти дополнительные точки;

5) по результатам исследования построить график в системе координат XOY.

41. $y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$

42. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$

43. $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

44. $y = \frac{1}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^2 + 3x + 3$

45. $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

46. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 1$

47. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$

48. $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + 3x - 6$

49. $y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4$

50. $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{2}x + 2$

Решение типовой задачи

Задача. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

Решение.

1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, так как она является многочленом целой степени, т. е. $x \in (-\infty;\infty)$. Функция непрерывна на всей числовой оси и ее график представляет непрерывную кривую.

2. Определим интервалы монотонности и экстремум функции. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю.

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x - 3\cdot 1 + 0 = x^2 - 2x - 3$$

$$y' = 0, \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

Решаем полученное квадратное уравнение.

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 4 - 4(-3)\cdot 1 = 4 + 12 = 16.$

Корни уравнения: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y' = (x+1)(x-3)$$

Получили $x_1 = -1;\ x_2 = 3$ две критические точки на экстремум, которые разбивают область определения функции на три интервала $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$, $(3;+\infty)$. Определим знаки первой производной в каждом интервале и по знаку установим промежутки убывания или возрастания функции и наличие максимума и минимума.

Исследуем их в таблице.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max $3\frac{2}{3}$	$\searrow$	min -7	$\nearrow$

$$y'(-2)=(-2+1)(-2-3)=-1\cdot(-5)=5>0$$

$$y'(0)=(0+1)(0-3)=1\cdot(-3)=-3<0$$

$$y'(4)=(4+1)(4-3)=5\cdot 1=5>0$$

В точке $x=-1$ производная меняет свой знак с плюса на минус. Поэтому функция в точке $x=-1$ имеет максимум, а в точке $x=3$ минимум.

$$y_{max}(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+2=-\frac{1}{3}-1+3+2=3\frac{2}{3}$$

$A\left(-1;3\frac{2}{3}\right)$ точка максимума

$$y_{min}(3)=\frac{1}{3}3^3-3^2-3\cdot 3+2=\cancel{9}-\cancel{9}-9+2=-7$$

$B(3;-7)$ точка минимума

3. Найдем точку перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости графика функции.

С этой целью определим вторую производную и приравняем ее к нулю:

$$y'=(y')'=\left(x^2-2x-3\right)'=2x-2=2(x-1)$$

$$y'=0;\ 2(x-2)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1.$$

Получили $x=1$ одну критическую точку на перегиб, которая разбивает область определения на два интервала $(-\infty;1)$; $(1;\infty)$. Определим знак второй производной в каждом интервале.

Исследуем точку $x=1$ в таблице.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	–	0	+
y	$\cap$	перег $-1\frac{2}{3}$	$\cup$

$$y'(0)=2\cdot 0-2=-2<0$$

$$y'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$$

График функции на интервале $(-\infty;1)$ выпуклый, и вогнутый в интервале где $x \in (1;\infty)$. В точке $x = 1$ вторая производная меняет знак на противоположный, следовательно, в этой точке кривая имеет точку перегиба.

$$y_{пер.}(1) = \frac{1}{3}1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = \frac{1}{3} - 2 = -1\frac{2}{3}$$

$$C\left(1;-1\frac{2}{3}\right) \text{ точка перегиба}$$

4. Найдем координаты точки пересечения графика функции с осью OY.

$$x = 0 \quad y = \frac{1}{3} \cdot 0^2 - 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \quad D(0;2)$$

5. Для построения графика (рисунок 2) в выбранной системе координат изобразим точки максимума, минимума, перегиба и точку пересечения графика с осью OY .

Учитывая результаты исследования, строим кривую.

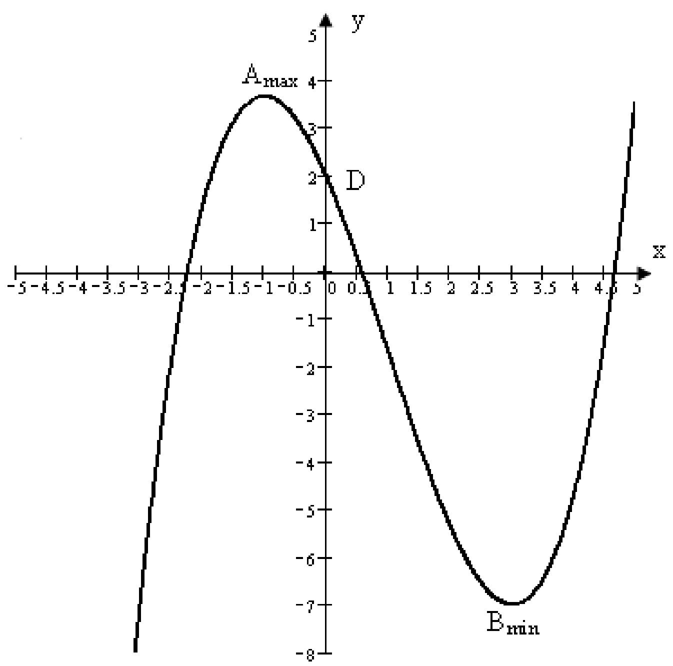

Рисунок 2.

В задачах 51-60 требуется найти указанные неопределенные интегралы.

51. 1) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}+1\right)dx$ 3) $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$ 4) $\int\frac{(2x-1)}{x^2-x+5}dx$

52. 1) $\int\left(2-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 3) $\int\frac{dx}{(2x+3)^5}$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ 4) $\int\sin(5-3x)dx$

53. 1) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)dx$ 3) $\int \square^{3x+2}dx$

2) $\int\frac{x^2dx}{5x^3+1}$ 4) $\int\cos(7x+1)dx$

54. 1) $\int\left(3x^2+\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{7}\right)dx$ 3) $\int\sin(4x-1)dx$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ 4) $\int\frac{x^2dx}{4x^3+1}$

55. 1) $\int\left(4x^3-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt{x^2}}+\frac{1}{3}\right)dx$ 3) $\int \square^{5x+3}dx$

2) $\int\sin^4 x\cos x dx$ 4) $\int\frac{dx}{1+9x^2}$

56. 1) $\int\left(5x^4-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{5}\right)dx$ 3) $\int\frac{dx}{3x+1}$

2) $\int\sqrt[3]{2x+3}dx$ 4) $\int\cos^3 x\sin x dx$

57. 1) $\int\left(6x^5-\frac{1}{x^2}-8\sqrt[5]{x^3}-\frac{1}{4}\right)dx$ 3) $\int 5^{2x+1}dx$

2) $\int\frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$ 4) $\int\frac{(x^2-1)dx}{x^3-3x+5}$

58. 1) $\int\left(7x^6 - \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{6}\right)dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$

2) $\int tg2xdx$ 4) $\int e^{x^3} x^2 dx$

59. 1) $\int\left(8x - \frac{5}{x^6} + 7\sqrt[6]{x} + 1\right)dx$ 3) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 5}$

2) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-3)}$ 4) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

60. 1) $\int\left(4 - \frac{1}{x^3} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$ 3) $\int \frac{x^3 dx}{x^4+1}$

2) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x+1}}$

При решении задач 51-60 используйте таблицу основных неопределенных интегралов.

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a} 2\sqrt{ax+b} + c$

4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

6. $\int e^x dx = e^x + c$ $\int e^{ax+b} = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

8. $\int \sin xdx = -\cos x + c$ $\int \sin kxdx = -\frac{1}{k}\cos kx + c$

9. $\int \cos xdx = \sin x + c$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctdx + c$

Решение типовой задачи

Задача. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \left(4x^3 - \frac{6}{x^4} + 9\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2} \right) dx$

2) $\int \frac{dx}{5x+1}$

3) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

4) $\int \frac{(tg\,2x+1)^3}{\cos^2 2x} dx$

Решение. Воспользуемся основными свойствами неопределенного интеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx; \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad \int dx = x + c$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

1) $\int \left(4x^3 - \frac{6}{x^4} + 9\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^{-4} dx + 9\int x^{\frac{2}{5}} dx - \frac{1}{2}\int dx =$

$$= \cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}_1} - \cancel{6}^{2}\frac{x^{-3}}{\cancel{-3}_1} + 9\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} - \frac{1}{2}x + c = x^4 + \frac{2}{x^3} + \frac{9\cdot 5}{7}\sqrt[5]{x^7} - \frac{1}{2}x + c =$$

$$= x^4 + \frac{2}{x^3} + \frac{45}{7}\sqrt[5]{x^7} - \frac{1}{2}x + c.$$

2) $\int \frac{dx}{5x+1}$

Решение. Для вычисления данного интеграла используем метод подстановки.

Пусть $5x+1=t$, тогда $dt = (5x+1)' dx$ или $dt = 5dx$, $dx = \frac{dt}{5}$.

Произведем замену переменной

$$\int\frac{dx}{5x+1}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{5}\ln|t|+c=\frac{1}{5}\ln|5x+1|+c.$$

3) $\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию и сделаем подстановку:

$$\int\frac{x^2}{1+x^6}dx=\int\frac{x^2}{1+\left(x^3\right)^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=x^3 \quad , \\ dt=\left(x^3\right)' dx=3x^2dx \\ x^2dx=\frac{dt}{3} \end{array}\right|=\int\frac{\frac{dt}{3}}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{3\left(1+t^2\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}arctgt+c=\frac{1}{3}arctgx^3+c.$$

4) $\int\frac{\left(tg\,2x+1\right)^3}{\cos^2 2x}dx$

Решение. Для вычисления интеграла используем метод подстановки.

$$\int\frac{\left(tg\,2x+1\right)^3}{\cos^2 2x}dx=\left|\begin{array}{l} tg2x+1=t \quad , \\ dt=\left(tg2x+1\right)' dx=\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2dx \\ \frac{1}{\cos^2 2x}dx=\frac{dt}{2} \end{array}\right|=\int t^3\cdot\frac{dt}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+c=\frac{\left(tg\,2x+1\right)^4}{8}+c.$$

В задачах 61-70 вычислить определенные интегралы.

61. 1) $\int_1^2\frac{2x^2+1}{x}dx$ 2) $\int_0^{\sqrt{3}}x\sqrt{25-3x^2}dx$

62. 1) $\int_1^8\left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int_0^1\square^{x^3-1}x^2dx$

63. 1) $\int_{1}^{2} \frac{x-1}{x^3} dx$ 2) $\int_{0}^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^4+5}\, dx$

64. 1) $\int_{-1}^{1} (x^2-2) dx$ 2) $\int_{1}^{2} \frac{x dx}{(2x^2+4)^4}$

65. 1) $\int_{0}^{1} (x+e^x) dx$ 2) $\int_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+2x^3}}$

66. 1) $\int_{1}^{4} \left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$

67. 1) $\int_{-2}^{2} (1+x)^2 dx$ 2) $\int_{0}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{9-5x^2}}$

68. 1) $\int_{2}^{3} \frac{1+x^5}{x^4} dx$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin x)^3 \cdot \cos x dx$

69. 1) $\int_{-1}^{0} \left(\frac{x^3}{4}+2x\right) dx$ 2) $\int_{1}^{e} \frac{2\ln x}{x} dx$

70. 1) $\int_{1}^{8} \left(1-4\sqrt[3]{x}\right) dx$ 2) $\int_{-1}^{0} x e^{1-x^2} dx$

Решение типовой задачи

Задача. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_{1}^{4} \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx$ 2) $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{(x^4+2)^2} dx$

Решение. Для вычисления определенного интеграла, если промежуток интегрирования конечен и подынтегральная функция на данном промежутке непрерывна, можно воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Чтобы найти первообразную функцию $F(x)$, выполним алгебраические преобразования:

$$\int_1^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4\left(2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = 2\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx - 3\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\cdot 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 - 6\sqrt{x}\Big|_1^4 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 6\sqrt{4} - \frac{4}{3}\left(\sqrt{1}\right)^3 + 6\sqrt{1} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 2^3 - 6\cdot 2 - \frac{4}{3} + 6 = \frac{32}{3} - 6 - \frac{4}{3} = \frac{28}{3} - 6 = \frac{28-18}{3} = \frac{10}{3}$$

2) $\int_0 \frac{x^3}{\left(x^4+2\right)^2}dx$

Решение. Для вычисления данного интеграла воспользуемся методом подстановки в определенном интеграле. Введем новую переменную следующей подстановкой:

$x^4 + 2 = t$, тогда $dt = \left(x^4+2\right)dx = 3x^3dx$ или $x^3dx = \frac{dt}{3}$.

Определим пределы интегрирования для переменной t. При $x=0$ получаем $t_н = 2 + 0^4 = 2$; при $x=1$ получаем $t_в = 1^4 + 2 = 3$.

Выразив подынтегральное выражение через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int \frac{x^3}{\left(x^4+2\right)^2}dx = \int_2^3 \frac{\frac{dt}{3}}{t^2} = \frac{1}{3}\int_2^3 t^{-2}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_2^3 = -\frac{1}{3t}\Big|_2^3 = -\frac{1}{9}+\frac{1}{6} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

В задачах 71-80 даны уравнения параболы и прямой. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь фигуры, ограниченной данными линиями. Сделать чертеж и заштриховать искомую площадь.

71. $y = \frac{1}{3}\left(x-1\right)^2, \quad y = x + 5$

72. $y = \frac{1}{3}\left(x-2\right)^2, \quad y = x + 4$

73. $y = \frac{1}{3}(x-3)^2, \quad y = x+3$

74. $y = \frac{1}{3}(x-4)^2, \quad y = x+2$

75. $y = \frac{1}{3}(x-5)^2, \quad y = x+1$

76. $y = \frac{1}{3}(x+1)^2, \quad y = x+7$

77. $y = \frac{1}{3}(x+2)^2, \quad y = x+8$

78. $y = \frac{1}{3}(x+3)^2, \quad y = x+9$

79. $y = \frac{1}{3}(x+4)^2, \quad y = x+10$

80. $y = \frac{1}{3}(x+5)^2, \quad y = x+11$

Решение типовой задачи

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{3}(x+6)^2$ и прямой $2x - y + 12 = 0$.

Решение. Площадь фигуры, ограниченной сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу - непрерывной кривой $y = \phi(x)$, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, вычисляем по формуле:

$$S = \int_a^b [f(x) - \phi(x)]dx.$$

Найдем координаты точки пересечения заданных параболы и прямой. Для этого решим систему, состоящую из их уравнений:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}(x+6)^2 \\ 2x - y + 12 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}(x+6)^2 \\ y = 2(x+6) \end{cases}$$

Приравняем правые части обоих уравнений

$$\frac{1}{3}(x+6)^2 = 2(x+6), \text{ преобразуем:}$$

$$\frac{1}{3}(x+6)^2 - 2(x+6) = 0; \quad (x+6)\cdot\left(\frac{1}{3}(x+6) - 2\right) = 0$$

$$x + 6 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}(x+6) - 2 = 0$$

$$x_1 = -6; \quad x + 6 = 6; \quad x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = \dfrac{1}{3}(-6+6)^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 2(0+6) = 12 \end{cases}$$

Таким образом, парабола пересекается с прямой в точках $A(-6;0)$, $B(0;12)$.

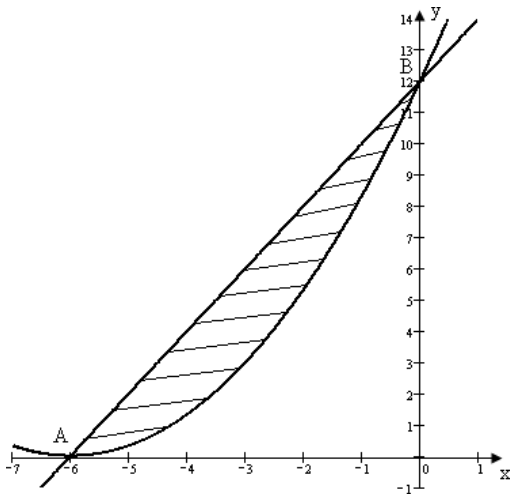

Рисунок 3

Сверху заданную фигуру (рисунок 3) ограничивает прямая $y = 2(x+6)$, а снизу – парабола $y = \frac{1}{3}(x+6)^2$. Следовательно, площадь фигуры равна следующему определенному интегралу:

$$S=\int_{-6}^{0}\left[2(x+6)-\frac{1}{3}(x+6)^2\right]dx=\int_{-6}^{0}\left[2x+12-\frac{1}{3}\left(x^2+12x+36\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-6}^{0}\left[2x+12-\frac{1}{3}x^2-4x-12\right]dx=\int_{-6}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^2-2x\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]\Bigg|_{-6}^{0}=-\frac{x^3}{9}-x^2\Bigg|_{-6}^{0}=0+\frac{(-6)^3}{9}+(-6)^2=$$

$$=-\frac{216}{6}+36=36-24=12.$$

Следовательно, искомая площадь равна 12 кв. ед.

В задачах 81-90 исследовать на экстремум данную функцию $\mathbf{z=f(x,y)}$.

81. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y-2$;

82. $z=2x^2-xy+y^2-3x-y+1$:

83. $z=3x^2-2xy+y^2-2x-2y+3$;

84. $z=2x^2+xy-y^2-7x+5y+2$;

85. $z=x^2-3xy-y^2-2x+6y+1$;

86. $z=3x^2+xy-6y^2-6x-y+9$;

87. $z=x^2-3xy+2y^2-4x+6y-2$;

88. $z=4x^2-2xy+y^2-2x-4y+1$;

89. $z=0{,}5x^2+xy+y^2-x-2y+8$;

90. $z=8x^2-xy+2y^2-16x+y-1$.

Решение типовой задачи

Задача. Исследовать на экстремум функцию

$$z=x^2+xy+y^2-2x-3y-4.$$

<u>Решение.</u> Чтобы исследовать функцию $z = f\left(x, y\right)$ на экстремум, необходимо: найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ и приравнять их к нулю и решить систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y - 4\right)'_x = 2x + y + 0 - 2 \cdot 1 - 0 - 0 =$$

$$= 2x + y - 2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y - 4\right)'_y = 0 + x + 2y - 0 - 3 - 0 =$$

$$= x + 2y - 3.$$

Решим систему $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ методом подстановки

$$\begin{cases} x = -2y + 3 \\ 2(-2y + 3) + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 3 \\ -4y + 6 + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + 3 \\ -3y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ x = -2 \cdot \frac{4}{3} + 3 = \frac{-8}{3} + 3 = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Получили одну критическую точку $P\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ на экстремум.

Исследуем критическую точку $P\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$, вычислив в данной точке значение выражения:

$$\Delta(P) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_P \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_P - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_P$$

Вычисляем значения производных второго порядка в точке $P\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(z'_x\right)'_x=\left(2x+y-2\right)'_x=2+0-0=2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_P=2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(z'_y\right)'_y=\left(x+2y-3\right)'_y=0+2-0=2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_P=2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_P=\left(z'_x\right)'_y=\left(2x+y-2\right)'_y=0+1-0=1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_P=1$$

Так как $\Delta P=2\cdot 2-1=3>0$, то в точке $P\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, функция имеет экстремум, причем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_P=2>0$, то минимума.

$$z_{\min}=z\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}-3\cdot\frac{4}{3}-4=$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}-\frac{2}{3}-8=\frac{21}{9}-\frac{2}{3}-8=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}-8=\frac{7-2-24}{3}=-\frac{19}{3}.$$

В задачах 91-100 найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

91. $(x+1)^3dy-(y+3)^2dx=0$, $\qquad y=0$ при $x=0$

92. $2ydx-tgxdy=0$, $\qquad y=-1$ при $x=\frac{\pi}{3}$

93. $(xy^2+x)dx+y(x^2+1)dy=0$, $\qquad y=1$ при $x=0$

94. $(x^2+1)dy+xydy=0$, $\qquad y=2$ при $x=0$

95. $(1-y)dx+(x-1)dy=0$, $\qquad y=\frac{1}{2}$ при $x=2$

96. $\cos xdy - y\sin xdx = 0$, $\qquad y=2$ при $x=\frac{\pi}{6}$

97. $e^{x}(1+e^{y})dx+e^{y}(1+e^{x})dy=0$, $\qquad y=0$ при $x=0$

98. $x^3ydy-(1+x^2)dx=0$, $\qquad y=2$ при $x=1$

99. $\sqrt{1-x^2}dy-x\sqrt{1-y^2}dx=0$, $\qquad y=0$ при $x=0$

100. $dy=(xy+y)dx$, $\qquad y=3$ при $x=0$

<u>Решение типовой задачи</u>

<u>Задача.</u> Дано дифференциальное уравнение первого порядка $(e^{2x}+1)dy+ye^{2x}dx=0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, $y=3$ при $x=0$.

<u>Решение.</u> Имеем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим каждое слагаемое уравнения на произведение $y(e^{2x}+1)$. Получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{(e^{2x}+1)dy}{y(e^{2x}+1)}+\frac{ye^{2x}}{y(e^{2x}+1)}dx=0$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=0$$

Такое дифференциальное уравнение можно почленно интегрировать:

$$\int\frac{dy}{y}+\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int 0$$

Воспользуемся таблицей интегралов

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1} dx = \ln c$$

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| = \ln c$$

После потенцирования имеем общее решение:

$$\ln y \cdot \sqrt{e^{2x}+1} = \ln c \text{ ; } y \cdot \sqrt{e^{2x}+1} = c$$

Чтобы найти частное решение, воспользуемся заданными начальными условиями: $y = 3$ при $x = 0$

Подставим заданные значения в общее решение, получим:

$$3\sqrt{e^{0}+1} = c \text{, откуда } c = 3\sqrt{2}$$

Тогда, частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = 3$ при $x = 0$, имеет вид $y = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

В задачах 101-100 задан закон распределения дискретной случайной величины в виде таблицы: в первой строке таблицы указаны возможные значения случайной величины, во второй – соответствующие вероятности. Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение. Начертить график закона распределения и показать на нем вычисленные математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

101.

x_i	25	30	35	40	45
p_i	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

102.

x_i	5	10	15	20	25
p_i	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

103.

x_i	5	10	15	20	25
p_i	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

104.

x_i	3	8	13	18	23
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

105.

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

106.

x_i	-5	-1	3	7	11
p_i	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

107.

x_i	110	120	130	140	150
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

108.

x_i	-10	0	10	20	30
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

109.

x_i	10	12	14	16	18
p_i	0,1	0,1	0,6	0,1	0,1

110.

x_i	8	11	14	17	20
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Решение типовой задачи.

Задача. Задан закон распределения дискретной случайной величины:

x_i	-1	6	13	20	27
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение. Начертить многоугольник распределения заданной случайной величины и показать на чертеже вычисленные математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

<u>Решение.</u> Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$M(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(x)^2\right)p_i$$

и по упрощенной формуле $D(x)=M\left(x^2\right)-M^2(x)$, где $M\left(x^2\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Расчёт числовых характеристик по этим формулам будет производиться с помощью таблицы 3:

Таблица 3

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i-M(x)$	$\left(x_i-M(x)\right)^2$	$\left(x_i-M(x)\right)^2 p_i$	$x_i^2 p_i$
-1	0,2	-0,2	-13,3	176,89	35,378	0,2
6	0,1	0,6	-6,3	39,69	3,969	3,6
13	0,4	5,2	0,7	0,49	0,196	67,6
20	0,2	4,0	7,7	59,29	11,858	80,0
27	0,1	2,7	14,7	216,09	21,609	72,9
$\sum$	1	12,3			73,010	114,3

Из таблицы имеем $M(x)=\sum_{i=1}^{n} xip_i=12,3$. $D(x)=M\left(x^2\right)-M^2(x)$, $M\left(x^2\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i=224,3$, $D(x)=224,3-(12,3)^2=224,3-151,29=73,01$.

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{73,01}\approx 8,544\approx 8,5.$$

Делаем чертёж. По оси абсцисс откладываем в выбранном масштабе значение случайной величины, по оси ординат – соответствующие вероятности. Масштаб по осям откладываем разный. Строим точки с координатами $M_1(-1;0{,}2),\ M_2(6;0{,}1),\ M_3(20;0{,}2),\ M_5(27;0{,}1).$

Полученные точки соединяем прямыми линиями. Получаем многоугольник распределения вероятностей заданный случайной величины.

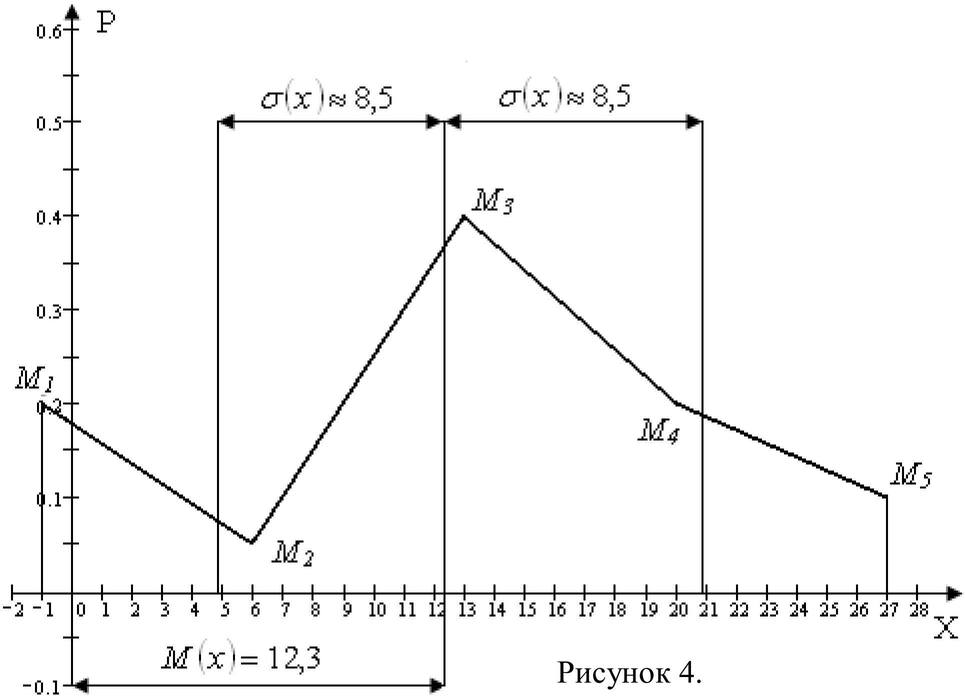

Рисунок 4.

Вычисленное значение математического ожидания откладываем от начала координат по оси абсцисс $M(x) = 12{,}3.$ От значения математического ожидания вправо и влево откладываем отрезки размером в одно среднее квадратичное отклонение.

Чертёж представлен на рис.4

В задачах 111 – 120 предполагается, что фактический расход некоторых семян на 1 га является нормально распределенной величиной. Норма высева этих семян на 1 га - *a* кг, случайные значения характеризуются средним квадратическим отклонением *σ* кг.

Найдите:

1) дифференциальную функцию распределения расхода семян на 1 га;

2) вероятность того, что расход семян на 1 га будет содержаться в интервале от *a* кг до *β* кг;

3)* вероятность того, что абсолютная величина отклонения расхода семян на 1 га от своей нормы не превышает *ε;

4) определить весь диапазон изменения расхода высева данных семян.

№ вар.	$\alpha_{кг}$	$\sigma_{кг}$	$\alpha_{кг}$	$\beta_{кг}$	$\varepsilon_{кг}$
111	170	12	165	172	15
112	150	9	143	155	11
113	165	11	160	170	12
114	145	6	141	150	8
115	175	14	170	180	17
116	180	10	175	186	12
117	170	11	162	178	14
118	155	12	148	163	15
119	182	10	175	190	17
120	162	8	152	168	10

Решение типовой задачи

Фактический расход некоторых семян на 1 га является нормально распределенной величиной. Средний расход при высеве этих семян на 1 га - 160 кг, случайные значения характеризуются средним квадратическим отклонением $\sigma=8$ кг.

Требуется найти:

1) дифференциальную функцию;

2) вероятность того, значения случайной величины будут содержаться в интервале от 155кг до 170 кг;

3) вероятность того, что абсолютная величина отклонения расхода семян на 1 га от своей нормы не превышает *12кг;*

4) весь диапазон изменения расхода семян.

Решение типовой задачи

1) Случайная величина X имеет нормальное распределение, если её плотность

распределения имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma=\sigma(x)$- среднее квадратичное отклонение.

В нашей задаче $a=160кг$, $\sigma=8кг$, тогда $f(x)=\dfrac{1}{12\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-160)^2}{128}}$.

2) Вероятность попадания нормально распределенной случайной в заданный интервал вычисляется по формуле: $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$- интегральная функция Лапласа (табл. 1 приложения). В нашем случае $a=160$, $\sigma=8$, $\alpha=155$, $\beta=170$.

Таким образом, получим:

$$P(155<X<170)=\Phi\left(\frac{170-160}{8}\right)-\Phi\left(\frac{155-160}{8}\right)=\Phi\left(\frac{10}{8}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{8}\right)=$$
$$=\Phi(1{,}5)+\Phi(0{,}625)=0{,}3944+0{,}2357=0{,}6301.$$

Итак, у 63,01% семян расход при высеве будет заключен в интервале (155 – 170) кг.

3) Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклонится от математического ожидания меньше чем на величину равна:

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Вероятность предельного отклонения 12кг можно вычислить, подставляя данные задачи в формулу:

$$P(|X-a|<12)=2\Phi\left(\frac{12}{8}\right)=2\Phi(1{,}5)=2\cdot0{,}4332=0{,}8664$$

С вероятностью 0,8664 можно гарантировать, что отклонение расхода семян от среднего значения будет меньше 12 кг.

4) Для нахождения всего диапазона изменения расхода данных семян при высеве на 1 га воспользуемся правилом трех сигм для нормально распределенной случайной величины, которое состоит в следующем: если

случайная величина распределена по нормальному закону, то почти все ее значения попадают в интервал, $(a-3\sigma; a+3\sigma)$ который является диапазоном изменения значении случайной величины.

В нашем примере получим: $(160-3\cdot8;160+3\cdot8)\Rightarrow(136;184)$, таким образом, расход семян на 1 га будет колебаться в пределах от 136 кг до 184 кг.

В задачах 121-130 заданы результаты наблюдении за количеством выпавших осадков. Требуется: 1) получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот; 2) вычислить среднюю $\overline{\mathbf{X}}$, дисперсию $\mathbf{S}^2$, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации $\mathbf{V}$, ошибку средней $\mathbf{S}_{\bar{x}}$; 3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{\mathbf{X}}_{\text{г}}$.

Результаты наблюдений представлены в таблице 4.

Таблица 4.

№	№задачи									
	121	122	123	124	125	126	127	1280	129	130
1	39	26	24	35	28	37	46	26	28	40
2	32	32	36	26	31	38	37	42	40	38
3	31	36	38	39	36	26	29	40	31	32
4	26	33	30	32	32	34	35	32	29	30
5	32	45	36	35	29	42	42	38	38	42
6	27	35	39	45	30	40	40	28	32	36
7	28	36	26	26	36	28	44	30	29	35
8	40	32	27	27	30	32	28	31	31	24
9	37	43	30	36	37	34	28	46	30	34
10	35	37	32	34	36	41	32	42	36	30
11	39	35	28	32	36	25	38	38	35	31
12	34	28	31	26	30	32	34	28	40	26
13	28	32	28	32	36	42	42	45	28	38
14	32	35	29	23	32	29	28	38	31	25
15	27	28	37	28	28	41	33	34	33	26
16	40	32	36	32	33	37	41	36	39	39
17	35	31	31	43	24	28	29	44	37	41
18	26	32	35	40	38	38	33	45	36	35
19	37	26	32	35	36	41	36	29	35	40
20	30	35	30	35	30	35	45	30	31	34

Решение типовой задачи

Задача. Дана случайная выборка, состоящая из 20 вариант: 35,9; 35,3; 42,7; 46,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 38,8; 38,4; 31,3; 35,9; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8.

Требуется:

1) получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот;

2) найти основные выборочные характеристики: $\overline{X}$, S^2, $S_{\bar{x}}$, V, S;

3) с надежностью 95% найти доверительный интервал для оценки генеральной средней $\overline{X}_Г$.

Решение.

1) Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания:

25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Для того чтобы составить вариационный интервальный ряд найдем размах вариации выборки по формуле $\Delta X = X_{\max} - X_{\min}$. Максимальное значение $X_{\max} = 46{,}2ц$, а минимальное - $X_{\min} = 25{,}9ц$, тогда $\Delta X = 46{,}2 - 25{,}9 = 20{,}3$. Этот размах разбиваем на определенное количество классов. При малом объеме выборке (20-40 вариант) берется 5-6 классов. Длину классового интервала находим по формуле:

$$\Delta X_i = \frac{\Delta}{5} = \frac{20{,}3}{5} = 4{,}06 \approx 4{,}1$$

Получим 5 интервалов: первый 25,9 - 30,0; второй 30,0 - 34,1; третий 34,1 – 38,2; четвертый 38,2 – 42,3; пятый 42,3 – 46,4.

С помощью ранжированного ряда определим частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадет два значения (25,9 и

27,0), поэтому $m_1 = 2$. Во второй интервал попадают четыре значения (30,8; 31,3; 33,4; 33,7), поэтому $m_2 = 4$. Аналогично $m_3 = 7$, $m_4 = 4$, $m_5 = 3$.

Полученный интервальный вариационный ряд запишем в виде таблицы 5:

Таблица 5

	Интервал значений $a_i - b_i$	Частоты вариант m_i	Относительные частоты ω_i	Плотность относительных частот P_i'
1	25,9 – 30,0	2	0,1	0,024
2	30,0 – 34,1	4	0,2	0,049
3	34,1 – 38,2	7	0,35	0,085
4	38,2 – 42,3	4	0,2	0,049
5	42,3 – 46,4	3	0,15	0,037
$\sum$			1, 00	

Относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал находим по формуле: $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$, где m_i - частота каждого интервала, а n -объем выборки. В нашей задаче $n = 20$.

$$\omega_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1; \qquad \omega_2 = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$\omega_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35; \quad \omega_4 = \frac{4}{20} = 0{,}2; \quad \omega_5 = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

Для проверки вычисляем сумму относительных частот, она должна равняться 1, т. е $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Так как в нашем случае $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$, то вычисления сделаны правильно.

По формуле $P_i' = \dfrac{\omega_i}{\Delta x}$ вычислим плотности P_i' относительных частот вариант. Получаем:

$$P_1 = \frac{0{,}1}{4{,}1} = 0{,}0244 \approx 0{,}024; \qquad P_2 = \frac{0{,}2}{4{,}1} = 0{,}0488 \approx 0{,}049$$

$$P_3 = \frac{0,35}{4,1} = 0,0854 \approx 0,085; \quad P_4 = \frac{0,2}{4,1} = 0,0488 \approx 0,049$$

$$P_5 = \frac{0,15}{4,1} = 0,0366 \approx 0,037$$

Полученные результаты записываем в таблицу.

Строим гистограмму относительных частот (рисунок 5) – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются классовые интервалы, а высотами соответствующие значения плотностей относительных частот P_i'. Классовые интервалы откладывают на оси абсцисс, а значения P_i' откладывают на оси ординат, масштаб выбираем разный по осям.

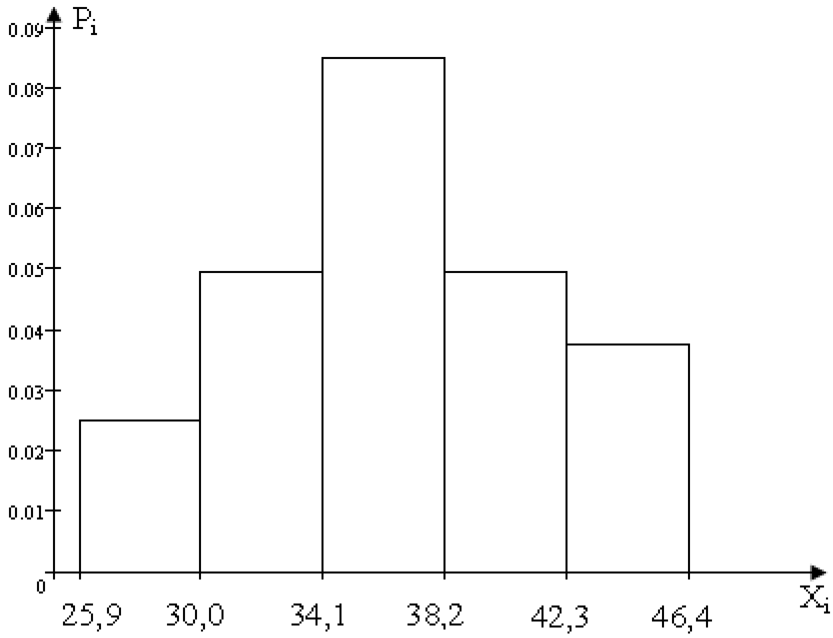

Рисунок 5.

2) Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ - выборочная средняя;}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \text{ - дисперсия;}$$

$$S = \sqrt{S^2} \text{ - среднее квадратическое отклонение;}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$ - ошибка средней;

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%$$ - коэффициент вариации.

Расчет $\overline{X}$ и S^2 производим с помощью таблицы 6.

Просуммировав варианты x_i, занесем сумму $\sum x_i$ в нижнюю строку таблицы под вторым столбцом.

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{720{,}3}{20} = 36{,}015 \approx 36{,}0$$

Округляем значение средней выборочной до десятичных. Заполняем третий столбец таблицы, в которой записываем значения отклонений, т. е разности $x_i - \bar{x}$. Для контроля можно вычислить сумму всех отклонений. Если разности вычислены правильно, то их сумма равна нулю. Затем значения отклонений возводим в квадрат и заполняем последний столбец таблицы. Вычислим сумму $\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 490{,}05$ и разделив ее на $n - 1 = 20 - 1 = 19$, получим значение дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{19} = \frac{490{,}05}{19} \cong 25{,}7921 \approx 25{,}79\,.$$

Далее находим среднее квадратическое отклонение выборочное: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{25{,}7921} = 5{,}0786 \approx 5{,}08$ и ошибку средней $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx \frac{5{,}08}{4{,}47} \approx 1{,}1365 \Rightarrow S_{\bar{x}} = 1{,}14$.

Таблица 6

№ n/n	Результат наблюдении x_i	Отклонение $x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
1	2	3	4
1	25,9	-10,1	102,1
2	27,0	-9,0	81,00
3	30,8	-5,2	27,04
4	31,3	-4,7	22,09
5	33,4	-2,6	6,76

6	33,7	-2,3	5,29
7	34,2	-1,8	3,24
8	35,3	-0,7	0,49
9	35,3	-0,7	0,49
10	35,5	-0,5	0,25
11	35,9	-0,1	0,01
12	35,9	-0,1	0,01
13	37,4	1,4	1,96
14	38,4	2,4	5,76
15	38,6	2,6	6,76
16	38,8	2,8	7,84
17	40,9	4,9	24,01
18	42,7	6,7	44,89
19	44,1	8,1	65,61
20	46,2	10,2	104,04
$\sum$	720,3		490,05

Вычисляем коэффициент вариации

$$V = \frac{S}{\overline{x}} \cdot 100\% = \frac{5{,}08}{36{,}0} \cdot 100\% \approx 0{,}141 \cdot 100\% \cong 14{,}1\% .$$

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость выборки следует считать средней.

3) Доверительный интервал для оценки генеральной средней определяем по формуле:

$$\overline{X}_в - t \cdot S_{\overline{X}} < \overline{X}_Г < \overline{X}_в + t \cdot S_{\overline{X}} .$$

Так как выборка маленькая, то ошибка репрезентативности подчиняется закону распределения Стьюдента и параметр t находится с помощью таблицы приложения 2 методического указания.

$t_\gamma = t(\gamma, n)$, где γ-заданная надежность, а n- объем выборки. В нашем примере $\gamma = 95\% = 0{,}95$, $n = 20$ по таблице имеем $t_\gamma = t(0{,}95;20) = 2{,}093$. Вычислим теперь радиус доверительного интервала:

$$t \cdot S_{\overline{X}} = 2{,}093 \cdot 1{,}14 \approx 2{,}386 \approx 2{,}39 .$$

Таким образом, с надежностью 95% можно утверждать, что значение генеральной средней исследуемого признака заключено в пределах:

$$\overline{X} - t_{\gamma} \cdot S_{\overline{X}} = 36{,}00 - 2{,}37 = 33{,}63 \text{ (гарантированный минимум)}$$

до $\overline{X} + t_{\gamma} \cdot S_{\overline{X}} = 36{,}00 + 2{,}37 = 38{,}37$ (возможный максимум).

В задачах 131 - 140 заданы зависимости двух случайных величин X и Y: 1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками; 2) составить уравнение прямой регрессии Y на X ;

3) нанести на чертеже исходные данные и построить прямую регрессии.

Данные результатов обследования заданы в таблицах 7 и 8.

Таблица 7.

№ наблюдения	№ задачи									
	131		132		133		134		135	
1	97	35	93	36	104	31	95	36	102	32
2	104	31	101	31	98	35	90	37	95	37
3	103	32	95	34	100	32	103	32	97	35
4	98	34	97	35	102	31	104	31	98	34
5	101	30	102	30	99	32	89	37	94	37
6	102	33	94	35	97	33	97	35	90	38
7	100	31	96	36	95	36	101	34	100	30
8	99	34	100	31	101	32	96	34	101	31
9	96	35	95	36	103	30	99	33	93	36
10	98	32	92	37	98	35	102	32	96	35

Таблица 8.

	№ задачи									
	136		137		138		139		140	
1	91	62	82	51	103	79	85	56	97	61
2	86	43	101	59	96	61	94	63	89	48
3	94	60	105	78	93	59	92	60	95	59

4	95	73	96	63	100	68	104	70	106	75
5	104	87	98	73	89	55	101	64	98	62
6	92	65	112	68	97	70	98	59	92	67
7	98	79	106	68	98	66	93	61	85	60
8	84	52	93	62	87	49	94	72	87	54
9	96	65	110	70	106	75	99	58	103	78
10	99	68	91	62	97	61	95	65	97	58

Решение типовой задачи

Задача. Исследование зависимости между двумя признаками X и Y дало следующие значения:

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

2) составить уравнение прямой регрессии;

3) нанести на чертеже исходные данные и построить полученную прямую регрессии.

Решение. 1) В малых выборках (n<30) коэффициент корреляции рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} .$$

Промежуточные вычисления удобно проводить в таблице 5, располагая X порядке возрастания.

Вычисляем средние:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}; \quad \overline{X} = \frac{830}{10} = 83, \qquad \overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n}; \ \overline{Y} = \frac{600}{10} = 60$$

Заполняем столбцы таблицы. Суммируя элементы в столбцах, находим:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=990,\ \sum_{i=1}^{10}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=6854,\ \sum_{i=1}^{10}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=2302.$$

Подставляя вычисленные значения в формулу для r, получаем

$$r=\frac{2302}{\sqrt{990}\cdot\sqrt{6854}}=\frac{2302}{2604{,}9}=0{,}8837\approx 0{,}88.$$

Вывод: между X и Y существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

Таблица 9.

№ наблюдения	x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$y_i-\overline{y}$	$\left(y_i-\overline{y}\right)^2$	$\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$
1	69	18	-14	196	-42	1764	588
2	70	48	-13	169	-12	144	156
3	72	42	-11	121	-18	324	198
4	75	31	-8	64	-29	841	232
5	83	56	0	0	-4	16	0
6	90	56	7	49	-4	16	-28
7	90	84	7	49	24	576	168
8	91	68	8	64	8	64	64
9	95	90	12	144	30	900	360
10	95	107	12	144	47	2209	564
$\sum$	830	600	0	990	0	6854	2302

2) Уравнение прямой регрессии имеет вид:

$$y-\overline{y}=b_{y/x}\left(x-\overline{x}\right),\text{ где}$$

$b_{y/x}$ - коэффициент регрессии, определяется по формуле:

$$b_{y/x}=\frac{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}.$$

Беря данные из таблицы, получим:

$$b_{y/x}=\frac{2302}{990}=2{,}32525\approx 2{,}325.$$

Подставляя теперь в уравнение прямой регрессии $\overline{X}=83$, $\overline{Y}=60$, $b_{y/x}\approx 2{,}32$ будем иметь $y-60=2{,}32\left(x-83\right)$.

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2{,}32x - 2{,}32 \cdot 83 + 60;\ y = 2{,}32x - 132{,}56.$$

3) Нанесем исходные данные на координатную плоскость и построим найденную прямую регрессии (рисунок 6).

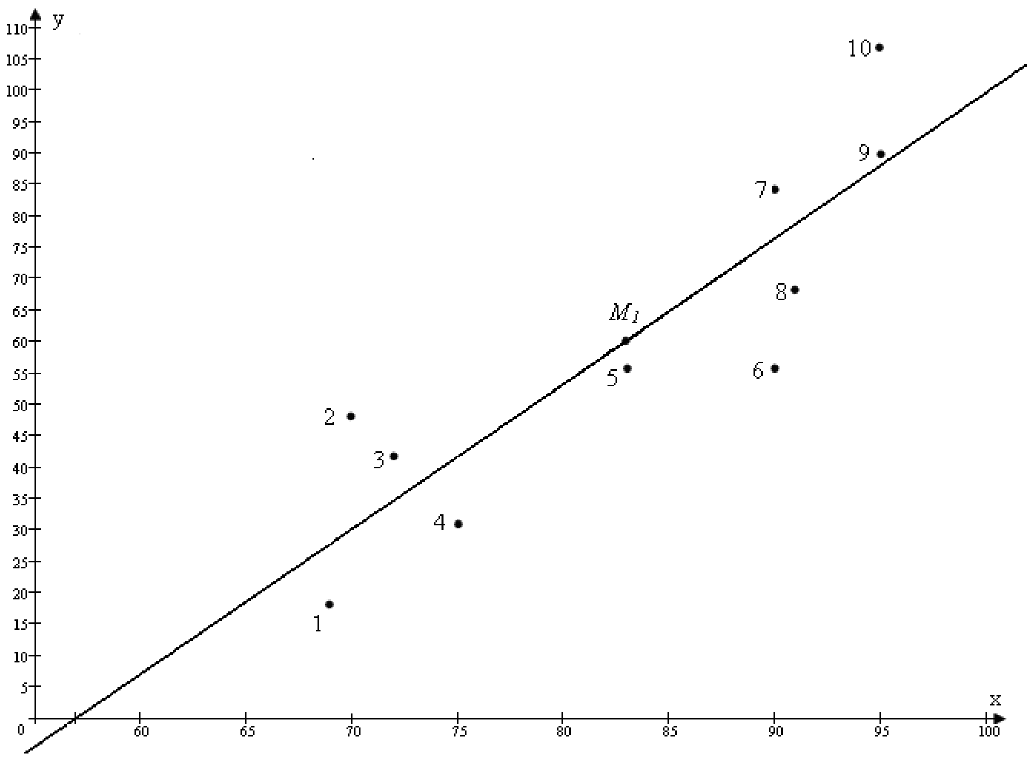

Рисунок 6.

Для того чтобы провести прямую в системе координат, достаточно иметь две точки. Одна точка $M_1(83;60)$. Координаты второй точки M_2 определим, подставив в уравнение регрессии $y = 0$ и вычислив

$$x = \frac{132{,}56}{2{,}32} \approx 57\ .$$

Полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что, например при *x=80* значение *y* составит $y = 2{,}32 \cdot 80 - 132{,}56 \approx 53$.

Приложения

Таблица 1

Значение функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3521
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2882	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830

Продолжение таблицы 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,50	0,4938
1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,52	0,4941
1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,54	0,4945
1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,56	0,4948
1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,58	0,4951
1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,60	0,4953
1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,62	0,4956
1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,64	0,4959
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,66	0,4961
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,68	0,4963
1,30	0,4032	1,65	0,4505	2,00	0,4772	2,70	0,4965
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783	2,72	0,4967
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,74	0,4969
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803	2,76	0,4971
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,78	0,4973
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,80	0,4974
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,82	0,4976
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,84	0,4977
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846	2,86	0,4979
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854	2,88	0,4980
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,90	0,4981
1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,92	0,4982
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875	2,94	0,4984
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,96	0,4985
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887	2,98	0,4986
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,00	0,49865
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898	3,20	0,49931
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904	3,40	0,49966
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909	3,60	0,499841
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913	3,80	0,499928
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,40	0,4918	4,00	0,499968
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,42	0,4922	4,50	0,499997
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,44	0,4927	5,00	0,4999999
1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,46	0,4931	∞	0,5
1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,48	0,4934		

Таблица 2.

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma; n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	,862	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Оглавление

Савельева Екатерина Владимировна
Островская Ирина Эдуардовна

Высшая математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлениям подготовки 06.03.01 Биология.

ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

ФГБОУ ВО Приморская ГСХА

Адрес: 692510, г. Уссурийск, пр-т Блюхера, 44