

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Комин Андрей Эдуардович

Должность: ректор

Дата подписания: 15.07.2026 11:45:48

Уникальный программный ключ:

f6c6d686f0c899fdf76a1ed8b448452ab8ca6fb1af6547b6d40cdf1bdc60ae2

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО

«Приморский государственный агротехнологический университет»
Инженерно-технологический институт

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки: 35.03.04 Агрономия; 35.03.03 Агрохимия и агропочвоведение; 35.03.07 Технология производства и переработка с/х продукции; 36.03.01 Ветеринарно-санитарная экспертиза; 36.03.02 Зоотехния; 35.03.01 Лесное дело и специальности 36.05. 01 Ветеринария.

Электронное издание

Уссурийск, 2023

Составитель: Савельева Екатерина Владимировна, к.т.н., доцент инженерно – технологического института

Высшая математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки: 35.03.04 Агрономия; 35.03.03 Агрохимия и агропочвоведение; 35.03.07 Технология производства и переработка с/х продукции; 36.03.01 Ветеринарно-санитарная экспертиза; 36.03.02 Зоотехния; 35.03.01 Лесное дело и специальности 36.05. 01 Ветеринария [Электронный ресурс]: / Е.В. Савельева; ФГБОУ ВО ПГАТУ. - Электрон. текст дан. - Уссурийск: ПГАТУ, 2023. - 70 с. - Режим доступа: [www. de.primacad.ru](http://www.de.primacad.ru).

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО «Приморский государственный агротехнологический университет

Введение

Настоящие методические указания составлены с целью помочь студенту- заочнику овладеть основными приемами и методами решения задач по высшей математике, привить умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике, повысить общий уровень математической культуры.

В методических указаниях приводятся рекомендации по изучению дисциплины, указания к выполнению контрольных работ, образцы решения типовых задач, контрольные задания.

Общие методические указания

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий.

Перед выполнением каждой контрольной работы студент должен изучить указанные темы, используя литературу и лекции.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. *Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие.*

2. *Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами.*

3. *Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с **последней цифрой** его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9), то номера задач соответствующего варианта даны в таблице 1.*

Если предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2.

Литература

1 Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика: учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт, 2019. — 401 с. — ISBN 978-5-534-07001-9.— URL: <https://biblio-online.ru/bcode/431945> (дата обращения: 25.12.2019). — Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. — 11-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2013. — 608 с. — ISBN 978-5-8112-4866-7.

2.Дополнительная литература:

1. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П.С. Александров. — СПб.: Лань, 2009. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-0908-2.
2. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление: учеб. пособие / И.М. Петрушко [и др.]; под ред. И.М. Петрушко. — 4-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2009. — 288 с. - ISBN 978-5-8114-0578-7.
- 3.Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения: лекции и практикум: учеб. пособие / И.М. Петрушко, Н.В. Гуличев, Л.А. Кузнецов; под ред. И.М. Петрушко. — 2-е изд. - СПб.: Лань, 2008. — 608 с.- ISBN 978-5-8114-0633-3.
4. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие / И.А. Соловьев и др. — СПб.: Лань, 2009. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-0751-4.
- 5.Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу [и др.]. — 9-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2011. — 576 с. — ISBN 978-5-8112-4389-1.

**1) Номера задач для студентов по направлениям: Зоотехния,
Ветеринария, ВСЭ.**

Таблица № 1

№	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9),											
1	3	11	30	41	52	61	83	104	111	121	132	141
2	4	12	29	42	53	62	84	105	112	122	133	142
3	5	13	28	43	54	63	85	106	113	123	134	143
4	6	14	27	44	55	64	86	107	114	124	135	144
5	7	15	26	45	56	65	87	108	115	125	136	145
6	8	16	25	46	57	66	88	109	116	126	137	146
7	9	17	24	47	58	67	89	110	117	127	138	147
8	10	18	23	48	59	68	90	101	118	128	139	148
9	1	19	21	49	60	69	81	102	119	129	131	149
0	2	20	22	50	51	70	82	103	120	130	140	150

Таблица №2

№	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0),											
1	7	14	30	48	55	69	84	107	117	127	133	148
2	9	15	25	46	58	70	85	108	120	128	139	149
3	3	19	29	41	59	68	89	111	118	121	140	150
4	8	11	28	50	57	66	81	105	115	125	135	145
5	10	12	22	49	51	65	82	104	111	124	134	144
6	2	16	27	42	60	67	86	107	116	127	136	146
7	1	20	26	43	54	64	90	103	114	123	131	141
8	4	13	24	44	52	63	83	101	113	121	138	144
9	6	18	23	45	53	61	88	102	112	122	132	142
0	5	17	21	47	56	62	87	106	119	126	137	147

**2) Номера задач для студентов по направлениям: Агрономия, ТП и
ПСХП, Агрохимия, Лесное дело.**

Таблица № 1

№	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9),											
1	3	11	30	34	41	52	61	73	83	91	104	111
2	4	12	29	35	42	53	62	74	84	92	105	112
3	5	13	28	36	43	54	63	75	85	93	106	113
4	6	14	27	37	44	55	64	76	86	94	107	114
5	7	15	26	38	45	56	65	77	87	95	108	115
6	8	16	25	39	46	57	66	78	88	96	109	116
7	9	17	24	40	47	58	67	79	89	97	110	117
8	10	18	23	31	48	59	68	80	90	98	101	118
9	1	19	21	32	49	60	69	71	81	99	102	119
0	2	20	22	33	50	51	70	72	82	100	103	120

Таблица №2

№	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0),											
1	7	14	30	38	48	55	69	77	84	98	107	117
2	9	15	25	37	46	58	70	79	85	97	108	120
3	3	19	29	35	41	59	68	73	89	95	111	118
4	8	11	28	36	50	57	66	78	81	96	105	115
5	10	12	22	33	49	51	65	80	82	93	104	111
6	2	16	27	34	42	60	67	72	86	94	107	116
7	1	20	26	37	43	54	64	71	90	91	103	114
8	4	13	24	32	44	52	63	74	83	92	101	113
9	6	18	23	39	45	53	61	76	88	99	102	112
0	5	17	21	40	47	56	62	75	87	100	106	119

Дисциплина и ее основные разделы

№ ДЕ	Наименование раздела	№ темы	Основные разделы
1	Линейная алгебра	1	<u>Определители 2 и 3 порядка.</u> Их вычисление. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по элементам какого-либо ряда. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
		2	<u>Матрицы.</u> Операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.
		3	<u>Системы линейных уравнений.</u> Матричная запись системы линейных уравнений. Правило Крамера. Система n- линейных уравнений с n- неизвестными. Метод Гаусса.
2	Аналитическая геометрия	4	<u>Метод координат.</u> Основные задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками на плоскости, середина отрезка).
		5	<u>Уравнение прямой на плоскости.</u> Понятие об уравнении линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой проходящей через две данные точки. Взаимное расположение прямых на плоскости, угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.
		6	<u>Канонические уравнения кривых второго порядка:</u> окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их геометрические свойства, технические приложения геометрических свойств кривых.
		7	<u>Плоскость и прямая в пространстве.</u> Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости, его частные виды. Угол между плоскостями; условия параллельности и перпендикулярности. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
3	Векторная алгебра	8	<u>Поверхности второго порядка.</u> Цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка (сфера, конусы, эллипсоид, гиперboloиды, параболоиды). Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений.
		9	<u>Векторы, основные понятия.</u> Линейные операции над векторами, заданными геометрически (сложение, вычитание, умножение вектора на число). Понятие компланарности и коллинеарности векторов.
		10	<u>Векторы, заданные координатами.</u> Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису координатных осей. Координаты вектора. Длина вектора. Направляющие косинусы. Условие

4	Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной		коллинеарности.
		11	<u>Произведение векторов.</u> Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их свойства, выражение через координаты.
		12	<u>Введение в математический анализ.</u> Определение функции. Область определения, способы задания. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел переменной величины, его свойства. Предел функции. Неопределенные выражения и способы их раскрытия. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.
		13	<u>Дифференцирование функции одной переменной.</u> Правила и формулы дифференцирования. Дифференциал функции. Основные теоремы дифференциального исчисления (правило Лопиталя, теоремы Ролля, Лагранжа). Применение дифференциального исчисления к исследованию функции (возрастание и убывание функции, точки экстремума, выпуклость и вогнутость, точки перегиба, асимптоты). Физические приложения.
		14	<u>Интегральное исчисление функции одной переменной.</u> Неопределенный интеграл: понятие первообразной, методы интегрирования (замена переменной, по частям), интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен, интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных выражений.
		15	<u>Определенный интеграл.</u> Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла (задача о нахождении площади криволинейной трапеции, пути при неравномерном движении, работы переменной силы), вычисление определенного интеграла (формула Ньютона – Лейбница), методы интегрирования , геометрические и физические приложения.
		16	<u>Несобственные интегралы.</u> Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от разрывных функций.
		17	<u>Приближенные вычисления определенных интегралов.</u> Методы вычисления по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.

№ ДЕ	Наименование раздела	№ темы	Основные разделы
5.	Дифференциальное исчисление функции двух переменных	18	<u>Функция нескольких переменных.</u> Определение функции нескольких переменных, область определения, график. Частные производные 1 и 2 порядка, их геометрический смысл. Дифференциал функции двух переменных, применение к приближенным вычислениям. Экстремум функции.
6	Дифференциальные уравнения	19	<u>Дифференциальные уравнения – основные понятия.</u> Задачи, приводящие к понятию дифференциальных уравнений. Порядок дифференциального уравнения, общее и частное решения. Геометрический смысл.
		20	<u>Дифференциальные уравнения 1 порядка.</u> Типы: с разделяющимися переменными, линейные, однородные, в полных дифференциалах. Методы их решения.
		21	<u>Дифференциальные уравнения 2 порядка.</u> Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. характеристическое уравнение. Структура общего решения. дифференциальные уравнения второго порядка.
7	Ряды	22	<u>Числовые ряды.</u> Определение сходимости и расходимости рядов. Необходимый признак сходимости. Признаки сходимости положительных числовых рядов (признаки сравнения, признак Даламбера, интегральный признак). Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.
		23	<u>Степенной ряд.</u> Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследование степенных рядов.
		24	<u>Разложение функции в степенной ряд.</u> Ряд Тейлора, Маклорена. Условия разложимости функции в степенной ряд. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Биномиальный ряд. Применение рядов к приближенным вычислениям.
8	Теория вероятностей	25	<u>События.</u> Классификация событий. Относительная частота, статистическое и классическое определение вероятности. Сумма событий. Теорема о вероятности

			суммы несовместных событий. Теорема о вероятности суммы двух совместных событий. Произведение событий. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
		26	<u>Повторные независимые испытания.</u> Формула Бернулли. Наивероятнейшая частота при повторении опытов. Асимптотические формулы. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Лапласа. Формула Пуассона.
		27	<u>Случайная величина. Дискретная случайная величина.</u> Виды случайных величин, закон распределения. Числовые характеристики дискретных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства.
		28	<u>Случайная величина. Непрерывная случайная величина.</u> Интегральная функция распределения, дифференциальная функция распределения (плотность распределения) их свойства, графики. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
		29	<u>Нормальное распределение.</u> Вероятностный смысл параметров распределения. Кривая нормального распределения. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Вероятность заданного отклонения. Доверительный интервал
9	Математическая статистика	30	<u>Генеральная совокупность и выборка.</u> Вариационные ряды. Дискретные, интервальные их составление. Статистическое распределение выборки. Числовые характеристики статистических рядов (мода, медиана, выборочная средняя, выборочная дисперсия, коэффициент вариации)
		31	<u>Статистические оценки.</u> Точечные оценки параметров распределения. Статистические оценки характеристик генеральной совокупности. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки.
		32	<u>Статистические гипотезы.</u> Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве долей и средних
		33	<u>Корреляционный анализ.</u> Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.

Тема:1 Элементы линейной алгебры

№ 1-10. Решить систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом;

в) сделать проверку найденного решения.

$$1. \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = -7 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + y - z = -7 \\ x - 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

Решение типового примера

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 8x - 3y + 6z = -2 \end{cases}$$

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом;

в) сделать проверку найденного решения.

Решение.

а) Для решения заданной системы линейных уравнений воспользуемся формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Составим и вычислим главный определитель системы.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 2(-6 - (-9)) - 1(24 - 24) + 1(-12 - (-8)) = 2 \end{aligned}$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Для его отыскания вычислим вспомогательные определители $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Для вычисления Δx в главном определителе первый столбец заменим столбцом свободных членов, для вычисления Δy и Δz соответственно второй и третий.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 7(-6 + 9) - (6 + 6) + (-3 - 2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 2(6 + 6) - 7(24 - 24) + (-8 - 8) = 8 \end{aligned}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 + 3) - (-8 - 8) + 7(-12 + 8) = -2$$

По формулам Крамера получим:

$$x = \frac{4}{2} = 2; \quad y = \frac{8}{2} = 4; \quad z = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 8x - 3y + 6z = -2 \end{cases} \quad (1)$$

Данную систему запишем в матричной форме и решим с помощью обратной матрицы.

Пусть A – матрица коэффициентов при неизвестных; X – матрица-столбец неизвестных x, y, z и H – матрица-столбец из свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Левую часть системы (1) можно записать в виде произведения матриц $A \cdot X$, а правую в виде матрицы H . Следовательно имеем матричное уравнение

$$A \cdot X = H. \quad (2)$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} . Умножим обе части равенства (2) слева на матрицу A^{-1} , получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица, а $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot H. \quad (3)$$

Формулу (3) называют матричной записью решения системы линейных уравнений. Чтобы воспользоваться формулой (3), необходимо сначала найти обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где ΔA - определитель матрицы коэффициентов, $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2$,

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ - алгебраическое дополнение к элементам матрицы,

M_{ij} - минор, определитель второго порядка, полученный путем вычеркивания i -ой строки и j -ого столбца.

Пример:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 14.$$

Подставляя полученные значения алгебраических дополнений и ΔA в формулу (4), получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 14 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -4,5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Заменяя (3) соответствующими матрицами, имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -4,5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,5 - 4,5 - 4 \\ 0 + 2 + 2 \\ -14 + 7 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где элементы неизвестной матрицы получены путем умножения строк обратной матрицы на соответствующие элементы матрицы свободных членов.

Откуда $x=2$; $y=4$; $z=-1$.

в) Проверим правильность полученного решения, подставив его в каждое уравнение заданной системы:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + 4 - 1 &= 7 & 7 &= 7 \\ 4 \cdot 2 - 4 + 3 \cdot (-1) &= 1 & \Rightarrow & 1 = 1 \\ 8 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) &= -2 & -2 &= -2 \end{aligned}$$

Получили три верных равенства, система решена правильно.

Тема:2 Аналитическая геометрия на плоскости.

№11-20. Даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти: 1. длину стороны АВ;

2. уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты.

3. угол при вершине В в радианах с точностью до двух знаков;

4. уравнение высоты СД;

5. уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД;

6. уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне АВ;

Решение данной задачи проиллюстрируйте на рисунке.

11. A(-1; 5), B(11; 0), C(17; 8)

16. A(-2; -6), B(-3; 5), C(4; 0)

12. A(6; 5), B(-6; 0), C(-10; 3)

17. A(2; -3), B(-1; -6), C(0; 1)

13. A(-2; 6), B(10; 1), C(16; 9)

18. A(0; 2), B(-7; 4), C(3; 2)

14. A(10; -1), B(-2; -6), C(-6; -3)

19. A(-5; 7), B(7; -2), C(11; 20)

15. A(-1; 7), B(11; 2), C(17; 10)

20. A(-8; -3), B(4; -12), C(8; 10)

Решение типового примера

Даны координаты вершин треугольника ABC: A(4;3), B(16;-6), C(20;16).

Найти: 1) длину стороны АВ; 2) уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты; 3) угол при вершине В в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты СД; 5) уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД; 6) уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне АВ.

Решение.

1) Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны AB :

$$AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек A и B , получим уравнение стороны AB :

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \quad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \quad \frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4};$$
$$4y-12=-3x+12; 3x+4y-24=0 \quad (AB).$$

Решив последнее уравнение относительно y , находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$4y=-3x+24; y=-\frac{3}{4}x+6, \text{ откуда } k_{AB}=-\frac{3}{4}.$$

Подставив в (2) координаты точек B и C , получим уравнение прямой BC :

$$11x-2y-188=0 \quad (BC), \text{ или } y=5,5x-94, \text{ откуда } k_{BC}=5,5.$$

3) Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты, которых соответственно равны k_1 и k_2 вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (3)$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC , угловые коэффициенты

которых найдены: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $k_{BC} = 5,5$. Применяя (3), получим

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} k_{BC}} = \frac{-\frac{3}{4} - 5,5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5,5} = \frac{-25}{4 - 16,5} = 2 \quad B \approx 63^\circ 26', \text{ или } B \approx 1,11 \text{ рад.}$$

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

Высота CD перпендикулярна стороне AB . Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD , воспользуемся условием перпендикулярности прямых $k_2 = -1/k_1$. Так как $k_{AB} = -3/4$, то $k_{CD} = 4/3$. Подставив в (4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим

$$y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20); 3y - 48 = 4x - 80; 4x - 3y - 32 = 0 \text{ (CD)}.$$

5) Чтобы найти уравнение медианы AE , определим сначала координаты точки E , которая является серединой стороны BC , применяя формулы деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (5)$$

Следовательно,

$$x_E = \frac{16 + 20}{2} = 18; \quad y_E = \frac{-6 + 16}{2} = 5; \quad E(18; 5).$$

Подставив в (2) координаты точек A и E , находим уравнение медианы:

$$\frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{x - 4}{18 - 4}; \quad \frac{y - 3}{2} = \frac{x - 4}{14};$$

$$x - 7y + 17 = 0 \text{ (AE)}.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты CD и медианы AE , решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0, \\ x - 7y + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 11, y = 4; \quad K(11; 4).$$

6) Так как искомая прямая параллельна стороне AB , то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой AB . Подставив в (4) координаты найденной точки K и угловой коэффициент $k = -3/4$, получим

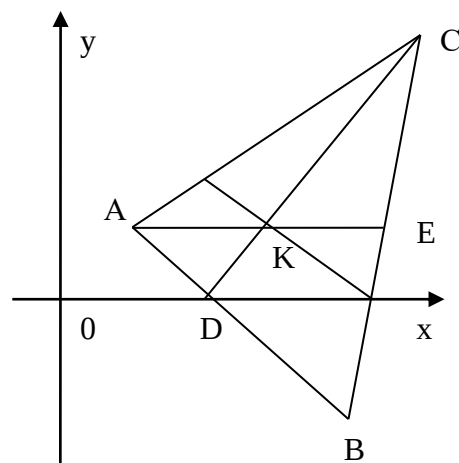


Рисунок 1

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 11); 4y - 16 = -3x + 33; \quad 3x + 4y - 49 = 0 (KF)$$

Треугольник ABC , высота CD , медиана AE ,

прямая KF и точка M построим в системе координат xOy на рисунке 1

Тема:3 Элементы векторной алгебры

№31-40. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

Требуется:

1. записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
3. найти площадь грани ABC ;
4. найти объем пирамиды $ABCD$.

21	A(2;-3;1)	B(6;1;-1)	C(4;8;-9)	D(2;-1;2)
22	A(5;-1;-4)	B(9;3;-6)	C(7;10;-14)	D(5;1;-3)
23	A(1;-4;0)	B(5;0;-2)	C(3;7;-10)	D(1;-2;1)
24	A(-3;-6;2)	B(1;-2;0)	C(-1;5;-8)	D(-3;-4;3)
25	A(-1;1;-5)	B(3;5;-7)	C(1;12;-15)	D(-1;3;-4)
26	A(-4;2;-1)	B(0;6;-3)	C(-2;13;-11)	D(-4;4;0)
27	A(0;4;3)	B(4;8;1)	C(2;15;-7)	D(0;6;4)
28	A(-2;0;-2)	B(2;4;-4)	C(0;11;-12)	D(-2;2;-1)
29	A(3;3;-3)	B(7;7;-5)	C(5;14;-13)	D(3;5;-2)
30	A(4;-2;5)	B(8;2;3)	C(6;9;-5)	D(4;0;6)

Решение типового примера

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2;1;0); B(3;-1;2), C(13;3;10), D(0;1;4)$. Требуется: 1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) найти площадь грани ABC ; 4) найти объем пирамиды $ABCD$; 5) уравнение плоскости Q , проходящей через точки A, B , и C ; 6) канонические уравнения

прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости Q ; 7) точки пересечения полученной прямой с плоскостью Q , и с координатными плоскостями xOy , xOz , yOz ;

Решение.

1) Произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующей формулой:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \quad (1)$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz ,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, направления которых совпадают с

положительным направлением осей Ox, Oy, Oz . Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$

и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатные оси находятся по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1. \quad (2)$$

Тогда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} \quad (3)$$

Подставив в (3) координаты точек A и B , получим вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 2) \cdot \vec{i} + (-1 - 1) \cdot \vec{j} + (2 - 0) \cdot \vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Аналогично, получим:

$$\overrightarrow{AC} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = -2\vec{i} + 4\vec{k}.$$

Если вектор $\vec{a}$ задан формулой (1), то его модуль вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4)$$

Применяя (4), получим модули найденных векторов:

$$|\overrightarrow{AB}| = 3, \quad |\overrightarrow{AC}| = 15, \quad |\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{5}.$$

2) Косинус угла между двумя векторами равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей.

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \quad (5)$$

Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 27.$$

Модули этих векторов уже найдены $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 15$.

Следовательно,

$$\cos A = \frac{27}{3 \cdot 15} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad A = 53^{\circ}8'.$$

3) Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Обозначим векторное произведение вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\vec{P}$. Тогда, как известно, модуль вектора выражает собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а площадь грани ABC будет равна половине модуля вектора $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 12\vec{j} + 24\vec{k};$$

$$|\vec{P}| = 36; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \text{ кв.ед.}$$

4) Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения.

Вычислим смешанное произведение $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 144.$$

Следовательно, объем параллелепипеда равен 144 куб.ед.,

объем заданной пирамиды $ABCD$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда ,т.е.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24 \text{ куб.ед.}$$

Тема:4 Дифференцирование и интегрирование функции одной переменной.

1.Предел функции. Непрерывность функции, точки разрыва.

№31-40. Найти указанные пределы.

31. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 4}$, а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{x-3}$

32. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{-3x^2 - x + 4}$, а) $x_0 = -2$, б) $x_0 = 1$, в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x \cdot \cos 3x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{7x}\right)^{x+5}$

33. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$, а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = -2$, в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{7x}\right)^{2x-1}$

34. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{-3x^2 - x + 14}$, а) $x_0 = -2$, б) $x_0 = 2$, в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 3x}{x^2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{8x}\right)^{3x+5}$

35. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x + 5}$, а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = -1$, в) $x_0 = \infty$;

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{x-4}$$

$$36. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 3x - 2}, \text{ а) } x_0 = 2; \text{ б) } x_0 = 1; \text{ в) } x_0 = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \cos 5x}{\sin 3x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{4x}\right)^{2x+3}$$

$$37. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 14}, \text{ а) } x_0 = 2, \text{ б) } x_0 = -2, \text{ в) } x_0 = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9}{5x}\right)^{x-5}$$

$$38. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 6}{-x^2 - x + 6}, \text{ а) } x_0 = -1, \text{ б) } x_0 = 2, \text{ в) } x_0 = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 10x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{10x}\right)^{x+1}$$

$$39. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x - 7}{3x^2 + x - 2}, \text{ а) } x_0 = -2, \text{ б) } x_0 = -1, \text{ в) } x_0 = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 9x}{x \operatorname{tg} 5x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{5x}\right)^{3x+2}$$

$$40. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + x - 6}, \text{ а) } x_0 = -1, \text{ б) } x_0 = -2, \text{ в) } x_0 = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \cos 7x}{\sin 2x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{9x}\right)^{x-2}$$

Решение типового примера

Найти указанные пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6}, \text{ а) } x_0 = 3, \text{ б) } x_0 = \infty;$$

Решение.

а) При подстановке предельного значения $x=3$ получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Для избавления от этого типа неопределенности в нашем случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$.

Для числителя имеем: $2x^2 - 3x - 9 = 0$,

найдем дискриминант :

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 81,$$

по формуле корней получим:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 9}{4} = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 9}{4} = 3$$

Следовательно, $2x^2 - 3x - 9 = 2(x - 3)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

Аналогично для знаменателя: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

Теперь условие задачи можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{(x - 3)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 3}{x + 2} = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3 + 2} = \frac{9}{5}.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Здесь сталкиваемся с неопределенностью $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} = \frac{\left(2 - \frac{3}{\infty} - \frac{9}{\infty} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\infty} - \frac{6}{\infty} \right)} = \frac{2 - 0 - 0}{1 - 0 - 0} = 2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x} = \frac{0}{0}$$

В данном случае для освобождения от неопределенности будем использовать первый замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1; \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{tg \alpha}{\alpha} = 1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg 4x \cdot tg 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{tg 4x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{4x}{tg 4x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{5x+1}$$

Решение.

Здесь сталкиваемся с неопределенностью $[1^\infty]$, преобразуем ко второму замечательному пределу $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha = e$. Для этого положим $\frac{3}{x} = \frac{1}{\alpha}$, где $\alpha \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, тогда $x = 3\alpha$.

Выразив основание и показатель степени через α , получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x+1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{15\alpha+1} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \right]^{15} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^1 = e^{15} \cdot 1 = e^{15}$$

2. Дифференцирование функции одной переменной.

№ 41-50. Найти производные и дифференциалы функции:

41. 1) $y = 3x^4 - \frac{5}{3x^3} - 9\sqrt{x^2} - 1$ 3) $y = (x^3 + 1) \cdot \ln(x + 1)$

2) $y = \frac{\arctg x}{1 + x^2}$ 4) $y = e^{\sin 5x}$

42. 1) $y = 2x^5 - \frac{1}{3x^3} + 4\sqrt{x}$ 3) $y = \frac{2^x}{\arccos x}$

2) $y = (x^2 - 2)\sin x$ 4) $y = \sqrt[4]{x^3 + \ln x}$

43. 1) $y = 4x^2 - \frac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4} + 2$ 3) $y = \frac{e^x}{2x + 1}$

2) $y = (1 - x^2)\operatorname{ctg} x$ 4) $y = \ln(x^2 + 5)$

44. 1) $y = 3x^5 - \frac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}$ 3) $y = \frac{\arccos x}{x^3 - 1}$

2) $y = 5^x \cdot \operatorname{tg} x$ 4) $y = \sqrt{x^3 + \sin 3x}$

45. 1) $y = 3x + \frac{4}{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 1$ 3) $y = \frac{\sin 2x}{x - 3}$

2) $y = (x^2 + 1)\arctg x$ 4) $y = (\ln x - \cos 3x)^2$

$$46. \quad 1) y = 5x^2 - \frac{3}{x} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{3}$$

$$2) y = (x+3)\arcsin x$$

$$3) y = \frac{\ln x}{2-x^2}$$

$$4) y = (\ell^{3x} - \sin 3x)^3$$

$$47. \quad 1) y = 4x^2 - \frac{3}{x^2} + 5\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}$$

$$2) y = \ell^{2x}(x^3 - 1)$$

$$3) y = \frac{\cos x}{x^2 - 2x}$$

$$4) y = (\ln \sin x - x)^3$$

$$48. \quad 1) y = x^5 + \frac{1}{2x^2} - 4\sqrt{x} + 3$$

$$2) y = (4x^2 + 1) \cdot \operatorname{ctgx}$$

$$3) y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$4) y = (x^3 - \ln x)^3$$

$$49. \quad 1) y = 2x^3 - \frac{2}{3x^6} + 3\sqrt{x^2} + \frac{1}{4}$$

$$2) y = (x + \ell^x)\arcsin x$$

$$3) y = \frac{\cos 3x}{x + \sin x}$$

$$4) y = \ln \operatorname{tg} 2x$$

$$50. \quad 1) y = 5x^6 - \frac{3}{2x^4} + 8\sqrt{x^3} - \frac{1}{5}$$

$$2) y = x^3 \arccos x$$

$$3) y = \frac{x+2}{\ln x}$$

$$4) y = (3x^2 + \ell^{2x})^4$$

При решении задач 41-50 будем использовать таблицу 1 - производных основных элементарных функции и правила дифференцирования суммы, разности, произведения, дроби и теорему о производной сложной функции:

$$1. [u \pm v]' = u' \pm v';$$

$$2. [u \cdot v]' = u'v + uv';$$

$$3. \left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

4.если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x))$;
если каждая из функций дифференцируема по своему аргументу, то

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

Таблица 1.

№п/п	функция	производная
1	$y = \text{const}$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
6	$y = e^x$	$y' = e^x$
7	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
8	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
9	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
14	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Решение типового примера

Найти производные и дифференциалы заданных функций:

$$1) y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2x^4} + 8\sqrt{x} + 2$$

Решение. Воспользуемся формулой производной степенной функции и правилом дифференцирования алгебраической суммы:

$$(x^n)' = nx^{n-1}; (u + v - w)' = u' + v' - w'$$

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^{-4} + 8x^{\frac{1}{3}} + 2$$

$$y' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{5}{2}x^{-4}\right)' + \left(8x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2'$$

Далее будем использовать следующие формулы:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'; (const)' = 0$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^{-4})' + 8\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2}(-4)x^{-5} + 8 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \\ &= x^2 + \frac{10}{x^5} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Дифференциал функции равен $dy = y' \cdot dx$, поэтому

$$dy = \left(x^2 + \frac{10}{x^5} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$$

$$2) y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$$

Решение. Воспользуемся формулой производной произведения двух функций:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'; (\sin x)' = \cos x$$

$$\begin{aligned} y' &= ((x^2 + 1) \cdot \sin x)' = (x^2 + 1)' \cdot \sin x + (x^2 + 1) \cdot (\sin x)' = \\ &= (2x + 0) \cdot \sin x + (x^2 + 1) \cdot \cos x = 2x \cdot \sin x + (x^2 + 1)\cos x \end{aligned}$$

$$dy = (2x \cdot \sin x + (x^2 + 1)\cos x)dx$$

$$3) y = \frac{\arcsin x}{x^2 + \ell^x}$$

Решение. Воспользуемся формулой производной частного двух функций:

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}; (\ell^x)' = \ell^x; (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y' &= \left(\frac{\arcsin x}{x^2 + \ell^x}\right)' = \frac{(\arcsin x)'(x^2 + \ell^x) - \arcsin x \cdot (x^2 + \ell^x)'}{(x^2 + \ell^x)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^2 + \ell^x) - \arcsin x(2x + \ell^x)}{(x^2 + \ell^x)^2} = \\ &= \frac{(x^2 + \ell^x) - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x(2x + \ell^x)}{\sqrt{1-x^2}(x^2 + \ell^x)^2} \\ dy &= \frac{(x^2 + \ell^x) - \sqrt{1-x^2} \arcsin x(2x + \ell^x)}{\sqrt{1-x^2}(x^2 + \ell^x)^2} dx\end{aligned}$$

$$4) y = (x^2 - \arctg x)^4$$

Решение. Данная функция является сложной степенной, она может быть представлена так: $y = u^4$, где $u = x^2 - \arctg x$. Применяя формулу $y' = (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$\begin{aligned}y' &= 4 \cdot (x^2 - \arctg x)^3 \cdot (x^2 - \arctg x)' = 4(x^2 - \arctg x)^3 \cdot \left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right) \\ dy &= 4(x^2 - \arctg x)^3 \cdot \left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right) dx\end{aligned}$$

$$5) y = \ln(x^2 + 3x)$$

Решение. Имеем сложную логарифмическую функцию $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Производная заданной функции:

$$y' = (\ln(x^2 + 3x))' = \frac{1}{x^2 + 3x} (x^2 + 3x)' = \frac{1}{x^2 + 3x} (2x + 3 \cdot 1) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

Дифференциал функции равен: $dy = y' dx$

$$dy = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} dx$$

3. Применение производной к исследованию функции

№ 51-60. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления. Начертить их графики. Исследование функций и построение графиков проводить по следующей схеме:

1. найти область определения функции $D(y)$;
2. исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва;
3. исследовать функцию на четность и нечетность.
4. найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;
5. найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;
6. найти асимптоты графика функции;
7. построить график, используя результаты исследований;

51. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;

б) $y = \frac{2}{x-1}$

52. а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$;

б) $y = \frac{3}{x+2}$

53. а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$;

б) $y = \frac{4}{x-3}$

54. а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$;

б) $y = \frac{4x}{x-3}$

55. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$;

б) $y = \frac{x}{x+2}$

56. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$;

б) $y = \frac{2x}{x-1}$

57. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$;

б) $y = \frac{3x}{x+2}$

58. а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$;

б) $y = \frac{4x}{x-3}$

59. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$;

б) $y = \frac{4}{x+2}$

60. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$;

б) $y = \frac{5}{x+5}$

Решение типового примера

Исследовать функции по схеме, указанной в условии задачи.

$$а) y = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21),$$

$$б) y = \frac{2}{x+1}$$

Решение.

$$а) y = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21)$$

1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x , то есть $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция непрерывна на всей числовой прямой, нет точек разрыва, следовательно, нет вертикальных асимптот.

3. При исследовании на четность, нечетность найдем $y(-x)$.

$$y(-x) = \frac{1}{5}(-2x^3 + 3x^2 + 36x - 21) \text{ или } y(-x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 + 36x - 21)$$

Получили, что: $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$

Следовательно, функция ни четная, ни нечетная – функция общего положения.

4. Находим интервалы возрастания, убывания и экстремум функции, для этого:

а) найдем производную функции

$$y' = \left[\frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21) \right]' = \frac{1}{5}[6x^2 + 6x - 36] = \frac{6}{5}(x^2 + x - 6)$$

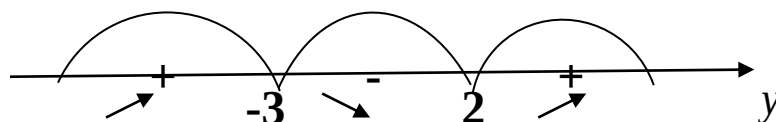
б) Приравняем производную к нулю, решим уравнение $y' = 0$ и найдем

$$\text{критические точки I рода: } \frac{6}{5}(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{array} \right\} \text{-критические точки.}$$

в) Критическими точками разобьем область определения на интервалы и

определим знак производной в каждом из интервалов. y'



Если, $x \in (-\infty; -3)$,

например, $x = -4$, то

$$y'(-4) = \frac{6}{5}(16 - 4 - 6) = \frac{36}{5} > 0.$$

Если, $x \in (-3; 2)$, например, $x = 0$, то $y'(0) = -\frac{36}{5} < 0$.

Если, $x \in (+\infty; 2)$, например $x=3$, то $y'(3) = \frac{6}{5}(9+3-6) = \frac{36}{5} > 0$.

При $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ функция возрастает, отмечаем это стрелкой ↗, при $x \in (-3; 2)$ функция убывает ↘.

г) Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с (+) на (-), то в этой точке функция имеет максимум (max), если знак меняется с (-) на (+), то в точке функция имеет минимум (min).

В нашем случае $x=-3$ – абсцисса точки max; $x=2$ – абсцисса точки min.

Вычисляем значение функции в точках экстремума

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{5}[2 \cdot (-27) + 3 \cdot 9 + 108 - 21] = \frac{1}{5} \cdot 60 = 12$$

$$y_{\min} = y(2) = \frac{1}{5}[2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 72 - 21] = \frac{1}{5}(-65) = -13$$

Для построения графика укажем $A(-3; 12)$ - точка max ; $B(2; -13)$ - точка min.

5. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y'' = (y')' = \left[\frac{6}{5}(x^2 + x - 6) \right]' = \frac{6}{5}(2x + 1)$$

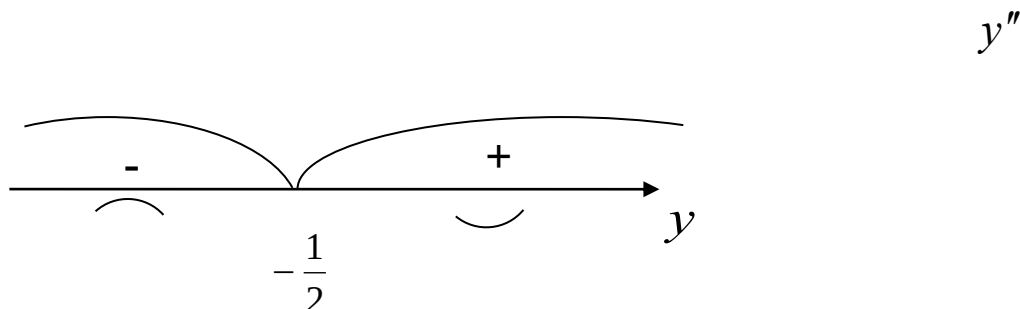
а) найдем производную второго порядка.

б) приравняем вторую производную к нулю, решим уравнение $y'' = 0$

и найдем критические точки II рода.

$$\frac{6}{5}(2x + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

в) область определения разобьем найденной точкой на интервалы и определим знак второй производной в каждом интервале



Расставляя знаки второй производной по интервалам, получаем, что в

интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, график функции выпуклый, в интервале

$\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ график функции вогнутый.

г) если при переходе через критическую точку II рода, y'' меняет знак, то в этой точке имеем перегиб, в нашем случае $x = -\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба.

Вычислим ординату точки перегиба.

$$y_{\text{перегиб}} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 21 \right) = \frac{1}{2}$$

$C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ - точка перегиба.

6. Выясним наличие наклонных асимптот у графика данной функции.

Уравнение асимптоты ищем в виде

$$y = kx + b, \text{ где } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

$$\text{Имеем} \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left[2x^2 + 3x - 36 - \frac{21}{x} \right] = \infty$$

Следовательно, наклонных асимптот график не имеет.

Можно найти точку пересечения с осью OY, $x=0 \Rightarrow y = -\frac{21}{5} = -4,2 \Rightarrow D(0; -4,2)$.

График на рисунке 2

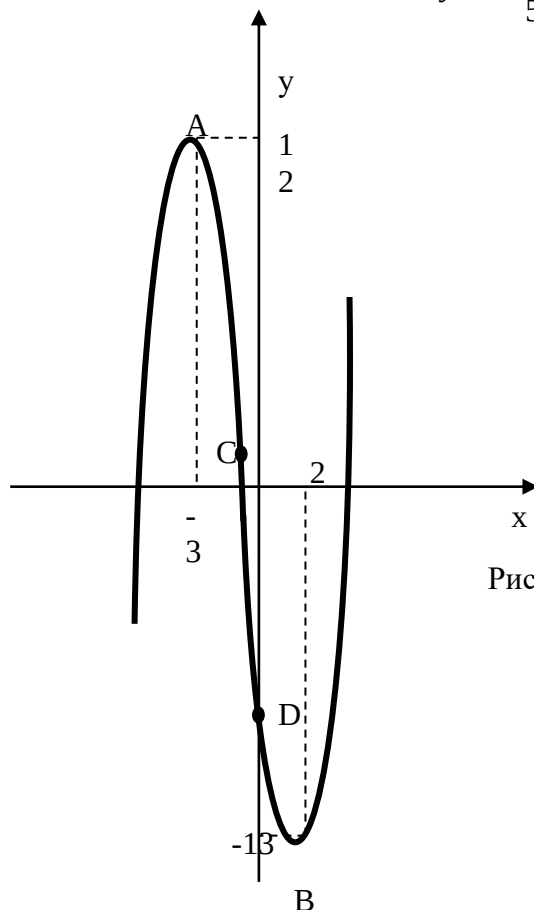


Рисунок 2

$$6) y = \frac{2}{x+1}$$

Решение.

1) Областью определения данной функции являются все значения x , кроме тех, для которых выполняется равенство

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1. \text{ Значит, } D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

2) Функция не определена при $x = -1$, значит, $x = -1$ есть точка разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{-1-0+1} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{-1+0+1} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

3) Исследуем функцию на четность и нечетность.

$$f(-x) = \frac{2}{-x+1} = -\frac{2}{x-1}$$

Из равенства видно, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, т.е. функция не является ни четной, ни нечетной.

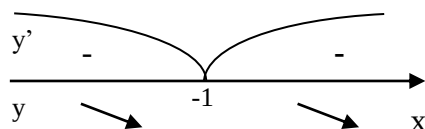
4) Найдем интервалы монотонности функции и её экстремумы (если они существуют).

Для этого первую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x+1} \right)' = \frac{2' \cdot (x+1) - 2 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{0 \cdot (x+1) - 2 \cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, но $-2 \neq 0$, значит, критических точек нет.

Определим знак первой производной в каждом из интервалов области определения. Т.к. $-2 < 0$, а квадрат любого числа всегда число положительное, то дробь при любом x из области определения будет отрицательной. Значит, функция убывает на всей области определения, экстремума она не имеет.



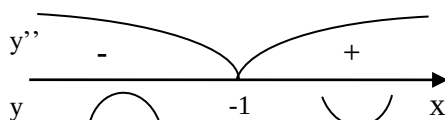
5) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба (если они существуют). Для этого вторую производную приравняем к нулю и решим полученное уравнение $f''(x) = 0$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right)' = -\left(\frac{2' \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot ((x+1)^2)'}{(x+1)^4}\right) \\ = -\left(\frac{0 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}\right) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, но $4 \neq 0$, значит, критических точек нет. Определим знак второй производной в каждом из интервалов области определения:

$x = -2 \in (-\infty; -1) \Rightarrow f''(-2) = \frac{4}{(-2+1)^3} = -4 < 0$, значит, на этом интервале график функции выпуклый.

$x = 0 \in (-1; +\infty) \Rightarrow f''(0) = \frac{4}{(0+1)^3} = 4 > 0$, значит, на этом интервале график функции вогнутый. Несмотря на то, что при переходе через точку $x = -1$ вторая производная меняет свой знак, она не является точкой перегиба, т.к. не принадлежит области определения данной функции. Значит, точек перегиба график данной функции не имеет.



6) Найдем наклонные асимптоты графика функции.

Находятся они по формуле:

$y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x(x+1)} = f(\infty) = \frac{2}{\infty} = 0 \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x+1} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} = f(\infty) = \frac{2}{\infty} = 0$$

Значит, прямая $y = 0$ (т.е. ось OX) есть горизонтальная асимптота.

7) Найдем дополнительную точку А – точку пересечения графика функции и оси OY . Абсцисса этой точки равна 0,

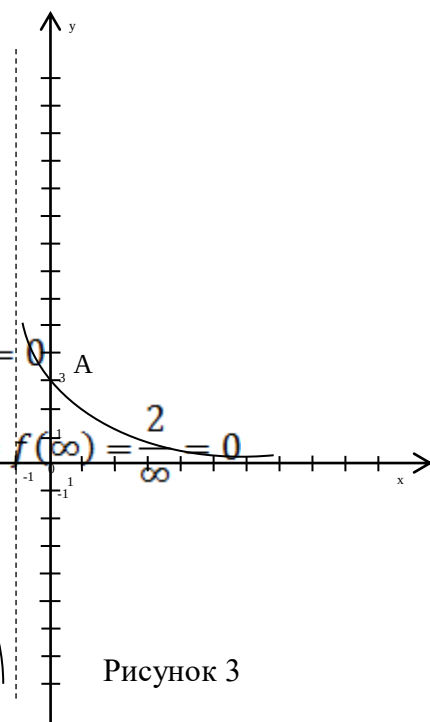


Рисунок 3

т.е. $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$. В прямоугольной системе координат $ХОУ$ построим вертикальную асимптоту, отметим точку $A(2;0)$ и, учитывая, что ось $ОХ$ есть горизонтальная асимптота, построим график данной функции

4. Неопределенный интеграл.

№ 61-70. Найти неопределенные интегралы.

61. 1) $\int \left(3x^2 + \frac{8}{x^5} + 11\sqrt{x^2} + 1 \right) dx$

3) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$

4) $\int \frac{(2x-1)}{x^2 - x + 5} dx$

62. 1) $\int \left(2 - \frac{3}{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$

3) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

4) $\int \sin(5-3x) dx$

63. 1) $\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) dx$

3) $\int e^{3x+2} dx$

2) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1}$

4) $\int \cos(7x+1) dx$

64. 1) $\int \left(3x^2 + \frac{5}{x^6} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{7} \right) dx$

3) $\int \sin(4x-1) dx$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

4) $\int \frac{x^2 dx}{4x^3 + 1}$

65. 1) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^3} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^2}} + \frac{1}{3} \right) dx$

3) $\int e^{5x+3} dx$

$$2) \int \sin^4 x \cos x dx$$

$$4) \int \frac{dx}{1+9x^2}$$

$$66. 1) \int \left(5x^4 - \frac{4}{x^2} + \frac{9}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{5} \right) dx$$

$$3) \int \frac{dx}{3x+1}$$

$$2) \int \sqrt[3]{2x+3} dx$$

$$4) \int \cos^3 x \sin x dx$$

$$67. 1) \int \left(6x^5 - \frac{1}{x^2} - 8\sqrt{x^3} - \frac{1}{4} \right) dx$$

$$3) \int 5^{2x+1} dx$$

$$2) \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$$

$$4) \int \frac{(x^2-1)dx}{x^3-3x+5}$$

$$68. 1) \int \left(7x^6 - \frac{3}{x^4} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{6} \right) dx$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$$

$$2) \int \operatorname{tg} 2x dx$$

$$4) \int \ell^{x^3} x^2 dx$$

$$69. 1) \int \left(8x - \frac{5}{x^6} + 7\sqrt{x} + 1 \right) dx$$

$$3) \int \frac{\ell^x dx}{\ell^x + 5}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sin^2(4x-3)}$$

$$4) \int \frac{dx}{1+4x^2}$$

$$70. 1) \int \left(4 - \frac{1}{x^3} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$$

$$3) \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 1}$$

$$2) \int \ell^{\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x+1}}$$

При решении задач 61-70 используйте таблицу 2 - основных неопределенных интегралов.

Таблица 2.

$$1. \int dx = x + c;$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c;$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c;$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$6. \int e^x dx = e^x + c;$$

$$13. \int ctg x dx = \ln|\sin x| + c;$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c;$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + t}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + t}) + C;$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c;$$

$$18. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + c;$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + c;$$

$$12. \int tg x dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + c$$

$$20. \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$21. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$22. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$23. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

Решение типового примера

Найти неопределенные интегралы

$$1) \int \left(4x^3 - \frac{6}{x^4} + 9\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$2) \int \frac{dx}{5x+1}$$

$$3) \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

$$4) \int \frac{(tg 2x + 1)^3}{\cos^2 2x} dx$$

Решение. Воспользуемся основными свойствами неопределенного интеграла:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx; \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \int dx = x + c$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

$$1) \int \left(4x^3 - \frac{6}{x^4} + 9\sqrt{x^2} - \frac{1}{2} \right) dx = 4 \int x^3 dx - 6 \int x^{-4} dx + 9 \int x^{\frac{2}{5}} dx - \frac{1}{2} \int dx =$$

$$= 4 \frac{x^4}{\frac{4}{1}} - 6 \frac{x^{-3}}{-\frac{3}{1}} + 9 \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} - \frac{1}{2} x + c = x^4 + \frac{2}{x^3} + \frac{9 \cdot 5}{7} \sqrt{x^7} - \frac{1}{2} x + c =$$

$$= x^4 + \frac{2}{x^3} + \frac{45}{7} \sqrt{x^7} - \frac{1}{2} x + c.$$

$$2) \int \frac{dx}{5x+1}$$

Решение. Для вычисления данного интеграла используем метод подстановки.

$$\text{Пусть } 5x+1=t, \text{ тогда } dt = (5x+1)' dx \text{ или } dt = 5dx, dx = \frac{dt}{5}.$$

Произведем замену переменной

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{5} \ln|t| + c = \frac{1}{5} \ln|5x+1| + c.$$

$$3) \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию и сделаем подстановку:

$$\int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = (x^3)' dx = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{3(1+t^2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctgt} + c = \frac{1}{3} \operatorname{arctgx}^3 + c.$$

$$4) \int \frac{(tg 2x + 1)^3}{\cos^2 2x} dx$$

Решение. Для вычисления интеграла используем метод подстановки.

$$\int \frac{(tg 2x + 1)^3}{\cos^2 2x} dx = \left. \begin{array}{l} tg 2x + 1 = t \\ dt = (tg 2x + 1)' dx = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 dx \\ \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int t^3 \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + c = \frac{(tg 2x + 1)^4}{8} + c.$$

5. Определенный интеграл, его вычисление, приложения.

В задачах 71-80 вычислить определенные интегралы.

$$71. 1) \int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{x} dx$$

$$2) \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{25 - 3x^2} dx$$

$$72. 1) \int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$2) \int_0^1 e^{x^3-1} x^2 dx$$

$$73. 1) \int_1^2 \frac{x-1}{x^3} dx$$

$$2) \int_0^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^4 + 5} dx$$

$$74. 1) \int_{-1}^1 (x^2 - 2) dx$$

$$2) \int_1^2 \frac{x dx}{(2x^2 + 4)^4}$$

$$75. 1) \int_0^1 (x + e^x) dx$$

$$2) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 + 2x^3}}$$

$$76. 1) \int_1^4 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx$$

$$77. 1) \int_{-2}^2 (1+x)^2 dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{9-5x^2}}$$

$$78. 1) \int_2^3 \frac{1+x^5}{x^4} dx$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin x)^3 \cdot \cos x dx$$

$$79. 1) \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{4} + 2x \right) dx$$

$$2) \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$80. 1) \int_1^8 (1-4\sqrt[3]{x}) dx$$

$$2) \int_{-1}^0 x e^{1-x^2} dx$$

Решение типового примера

Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_1^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4+2)^2} dx$$

Решение. Для вычисления определенного интеграла, если промежуток интегрирования конечен и подынтегральная функция на данном промежутке непрерывна, можно воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Чтобы найти первообразную функцию $F(x)$, выполним алгебраические преобразования:

$$\int_1^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{4}{3} (\sqrt{x})^3 - 6\sqrt{x} \Big|_1^4 = \frac{4}{3} (\sqrt{4})^3 - 6\sqrt{4} - \frac{4}{3} (\sqrt{1})^3 + 6\sqrt{1} = \\
&= \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 - \frac{4}{3} + 6 = \frac{32}{3} - 6 - \frac{4}{3} = \frac{28}{3} - 6 = \frac{28-18}{3} = \frac{10}{3} \\
2) &\int_0^1 \frac{x^3}{(x^4+2)^2} dx
\end{aligned}$$

Решение. Для вычисления данного интеграла воспользуемся методом подстановки в определенном интеграле. Введем новую переменную следующей подстановкой:

$$x^4 + 2 = t, \text{ тогда } dt = (x^4 + 2)dx = 3x^3 dx \text{ или } x^3 dx = \frac{dt}{3}.$$

Определим пределы интегрирования для переменной t . При $x = 0$ получаем $t_{\text{н}} = 2 + 0^4 = 2$; при $x = 1$ получаем $t_{\text{г}} = 1^4 + 2 = 3$.

Выразив подынтегральное выражение через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int \frac{x^3}{(x^4+2)^2} dx = \int_2^3 \frac{\frac{dt}{3}}{t^2} = \frac{1}{3} \int_2^3 t^{-2} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_2^3 = -\frac{1}{3t} \Big|_2^3 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

№81-90. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

81. $y = -x^2 - 2x + 3$

$y = -2x - 1$

82. $y = x^2 + 6x + 7$

$y = x + 7$

83. $y = -x^2 - 6x - 5$

$y = x + 1$

84. $y = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$

$y = \frac{x}{2} + 4$

85. $y = \frac{x^2}{3} + 2x + 3$

$y = x + 3$

86. $y = x^2 - 4x + 1$

$y = x + 1$

87. $y = -x^2 - 6x + 5$

$y = -x + 5$

88. $y = x^2 - 4x + 4$

$y = x$

89. $y = x^2 - 6x + 5$

$y = -x - 1$

90. $y = \frac{x^2}{3} - 2x + 3$

$y = 2x - 6.$

Решение типового примера.

Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{3}x^2; \quad y = -x + 6$$

Решение.

Найдём точки пересечения этих линий и сделаем чертёж, который указан на рисунке 4.

Решим систему:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x^2 + 3x - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x_1 = \frac{-3-9}{2} = -6 \\ x_2 = \frac{-3+9}{2} = 3 \end{cases}$$

Точки пересечения линий: $A(-6; 12); B(3; 3)$

$y = \frac{1}{3}x^2$ - парабола, ветви вверх, вершина $O(0;0)$, $y = -x + 6$ - прямая линия.

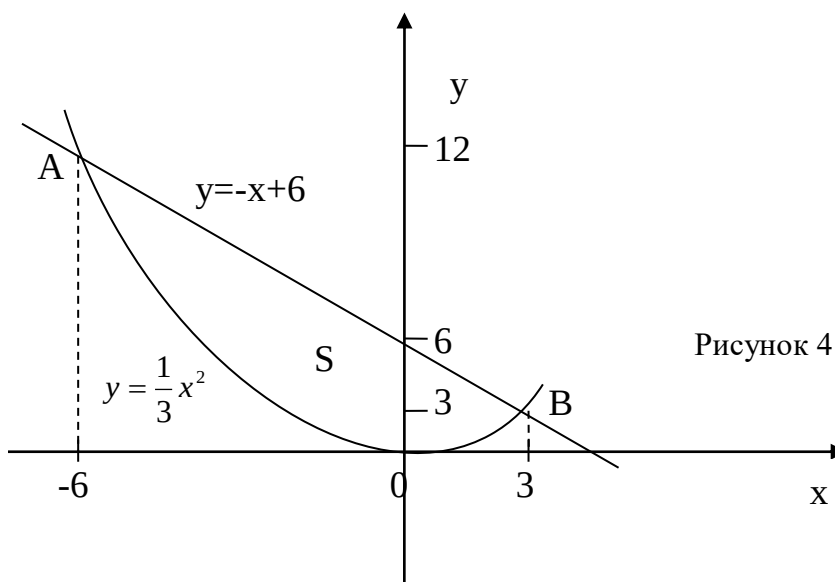


Рисунок 4

Вычисление площади осуществляем по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx,$$

$y = f_1(x)$ -кривая ограничивающая фигуру снизу,

$y = f_2(x)$ -кривая ограничивающая фигуру сверху

В нашем случае $f_1(x) = \frac{1}{3}x^2$; $f_2(x) = -x + 6$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^3 \left[(-x + 6) - \frac{1}{3}x^2 \right] dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{-6}^3 = \\ &= \left(-\frac{9}{2} + 18 - \frac{3^3}{3^2} \right) - \left(-\frac{36}{2} - 36 - \frac{(-6)^3}{9} \right) = \\ &= (-4,5 + 18 - 3) - (-18 - 36 + 24) = 11,5 + 30 = 41,5 \\ S &= 41,5 \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

Тема:5 Функция двух переменных.

№ 91-100. Дана функция двух переменных $z = f(x, y)$.

Требуется:

1. исследовать данную функцию на экстремум;
2. найти градиент функции в точке A ;
3. найти производную функции в точке A по направлению градиента.

91. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	$A(1;2)$
92. $z = xy - y^2 - x^2 + 1$	$A(2;2)$
93. $z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	$A(0;1)$
94. $z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$	$A(0;-2)$

95. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	$A(-1;4)$
96. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y$	$A(0;-2)$
97. $z = x^3 - 3xy + y^3 + 10$	$A(2;0)$
98. $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3 + 1$	$A(1;2)$
99. $z = x^3 - 2xy + 8y^3 + 2$	$A(-1;1)$
100. $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4$	$A(-2;1)$

Решение типового примера

Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$, точка $A(1;-2)$.

Требуется: 1. исследовать данную функцию на экстремум; 2. найти градиент функции в точке A ; 3. найти производную функции в точке A по направлению градиента

Решение.

1) Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию на экстремум необходимо выполнить следующие действия:

а) Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравняем к нулю и решим систему уравнений, решением которой являются стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Следовательно, заданная функция имеет только одну стационарную точку $P(4,-2)$.

б) Найдем частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 .$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных x и y , следовательно, постоянны в любой точке. Поэтому для точки $P(4,-2)$ имеем $A=-2; B=-1; C=-2$.

в) составить и вычислить определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2) \cdot (-2) - (-1)^2 = 3$$

г) Если в исследуемой стационарной точке $\Delta > 0$, то функция $z=f(x,y)$ в этой точке имеет максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$; если $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме требует дополнительного исследования. Для данной функции $\Delta > 0$ и $A < 0$, следовательно, в точке $P(4,-2)$ имеем максимум.

д) Найдем значение функции:

$$z_{\max} = z(4;-2) = -(4^2) - 4 \cdot (-2) - (-2)^2 + 6 \cdot 4 - 4 = 8.$$

2) Градиент функции находится по формуле

$$\overrightarrow{\text{grad}} z(x; y) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j} \quad (1)$$

Подставим в формулу (1) найденные частные производные, получим

$$\overrightarrow{\text{grad}} z(x; y) = (-2x - y + 6) \cdot \vec{i} + (-x - 2y) \cdot \vec{j}.$$

Вычислим градиент в точке $A(1;-2)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} A = (-2 \cdot 1 - (-2) + 6) \cdot \vec{i} + (-1 - 2 \cdot (-2)) \cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} A = 6\vec{i} + 3\vec{j}.$$

3) Производная по направлению в точке, выражается через частные производные функции, следующим образом:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_A = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_A \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_A \cdot \cos \beta. \quad (2)$$

$\cos \alpha$ и $\cos \beta$ - направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, в нашем случае вектор $\vec{s}$ совпадает с $\overrightarrow{\text{grad } z}$.

Найдем направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}} ; \quad \cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставим полученные выражения в формулу (2), получим:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_A = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_A = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

Тема:6 Дифференциальные уравнения.

№101-110. Даны дифференциальные уравнения.

Требуется:

А) найти общее решение уравнении первого порядка и частное решение при заданном начальном условии: 1. с разделяющимися переменными; 2. однородные; 3. линейные;

Б) решить уравнения второго порядка: 1. допускающие понижения порядка, найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям; 2. частное решение линейного однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям; 3. общее решение линейного однородного уравнения.

№	А	Б
101	1. $(x+4)dy - (y-2)dx = 0$ 2. $y' = \frac{x}{y^5}$; $y(0)=1$ 3. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$	1. $y'' = x - 5 + 2x$ $y(0)=6$; $y'(0)=10$. 2. $y'' - 3y' - 4y = 0$; $y(0)=1$; $y'(0)=-2$ 3. $y'' + 16y' + 64y = 0$
102	1. $(y-1)dy + (x+2)dx = 0$, $y(0)=1$ 2. $y^2 y' + x^2 = 1$. 3. $\cos xy' + y \sin x = 1$	1. $y'' = x^4 - 3 + \sin x$ $y(0)=1$; $y'(0)=3$. 2. $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y(0)=-1$; $y'(0)=3$. 3. $y'' + 12y' + 37y = 0$
103	1. $(x-1)dy - 2(y-2)dx = 0$, $y(1)=0$ 2. $yy' + x^2 = 0$.	1. $y'' = e^x + \sin x + 7x$ $y(0)=7$; $y'(0)=-7$ 2. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y(0)=2$; $y'(0)=3$.

	3. $xy' + y - y^2 \ln x = 0$	3. $4y'' - 8y' + 5y = 0$
104	1. $ydy - xdx = 0$ 2. $xy' - y = 0; y(-2) = 4.$ 3. $y' \sin x - y = 1 - \cos x$	1. $y'' = \cos x + 2 - 6x \quad y(0) = 2; y'(0) = -1$ 2. $2y'' + y' - y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 1$ 3. $y'' + 4y = 0$
105	1. $dy - 3(x-1)^2 dx = 0$ 2. $xy' + y = 3; y(-2) = 4.$ 3. $xy' - (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$	1. $y'' = \sin x - 6 + 4x \quad y(0) = 1; y'(0) = 1$ 2. $y'' - 7y' + 6y = 0; y(0) = 2; y'(0) = -1.$ 3. $y'' + 6y' + 13y = 0$
106	1. $\operatorname{ctg} x dy + y dx = 0$ 2. $y' \sqrt{1-x^2} = 1 + y^2.$ 3. $y' + y \cos x = \cos x, y(0) = 0$	1. $y'' = 3x^5 - \cos x + 3x \quad y(0) = 2; y'(0) = 3.$ 2. $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6; y'(0) = 10$ 3. $y'' + 4y' + 29y = 0$
107	1. $(y+1)dx - (1+x)dy = 0$ 2. $(x+1)y' + xy = 0.$ 3. $xy' - y = x \ln x, y(1) = -1$	1. $y'' = x - 5x^3 + \cos x \quad y(0) = 1; y'(0) = 3.$ 2. $y'' + y' - 2y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 3.$ 3. $y'' + 2y' + 5y = 0$
108	1. $(y+3)dx - (x-2)dy = 0$ 2. $xy' - y = 5; y(-2) = 4.$ 3. $xyy' - y^2 - x = 0$	1. $y'' = 4 - 2x^4 + e^x \quad y(0) = -1; y'(0) = 3$ 2. $y'' - 2y' = 0; y(0) = 1; y'(0) = 3.$
109	1. $dy - 2(x+1)dx = 0 \quad y(0) = 0$ 2. $xy' + y^7 = 0$ 3. $y' - 2xy = 2x e^{x^2}$	1. $y'' = \sin x + 4x - 3x^2 \quad y(0) = -1; y'(0) = 3$ 2. $y'' - 7y' + 12y = 0; y(0) = -2; y'(0) = 8.$ 3. $5y'' - 6y' + 5y = 0$
110	1. $ydy + 2xdx = 0$ 2. $xy \cdot y' = 1 - x^2$ 3. $y' + xy = x, y(1) = 1$	1. $y'' = 4x^2 - 2e^x + 3 \quad y(0) = -2; y'(0) = 8$ 2. $y'' + 3y' + 2y = 0; y(0) = 7; y'(0) = -7$ 3. $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение типового примера

1) Решить дифференциальные уравнения первого порядка:

а) Найти общее решение дифференциального уравнения $\cos^2 y dx = e^{-2x} dy$.

Решение.

Разделим обе части на $\cos^2 y e^{-2x}$, получим: $\frac{dx}{e^{-2x}} = \frac{dy}{\cos^2 y}$.

Проинтегрируем обе части уравнения: $\int e^{2x} dx = \int \frac{dy}{\cos^2 y}$, получим

$\frac{1}{2} e^{2x} = \operatorname{tg} y + c$ - общий интеграл.

2) Найти частное решение уравнения $y' - \frac{2}{x+1} y = 0$ при заданных начальных условиях $y(3) = 1$.

Решение.

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2}{x+1}y, \quad \text{выразим производную через}$$

дифференциалы переменных $y' = \frac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на

dx , получим;

$$dy = \frac{2}{x+1}ydx, \text{ далее разделим переменные: } \frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx.$$

Интегрируем обе части: $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln|C|$, для

упрощенного представления общего решения постоянную C выразили через $\ln|C|$. Применяя свойства логарифмов упростим полученную функцию

$$\ln|y| = \ln(|x+1|^2 \cdot C) \Rightarrow y = (x+1)^2 \cdot C - \text{общее решение.}$$

Найдем частное решение, для этого подставим в общее решение начальные условия $y(3) = 1$, получим: $1 = (3+1)^2 \cdot C \Rightarrow C = \frac{1}{16}$. Поставляя полученное

значение C в общее решение, найдем $y = \frac{1}{16}(x+1)^2$ - частное решение.

3) Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка.

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, т.е. уравнением вида: $y' + P(x)y = Q(x)$

Для решений уравнений положим: $y = u \cdot v$, где u, v – независимые функции от x , $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение в нашем случае будем иметь:

$$u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} \text{ или } (u' - u \operatorname{ctg} x) \cdot v + uv' = \frac{1}{\sin x}$$

Подберем функцию $u = u(x)$ так, чтобы выражение в скобке, обращалось в нуль. Для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} u' - u \operatorname{ctg} x = 0 & (1) \\ uv' = \frac{1}{\sin x} & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) системы определяем функцию $u(x)$, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u' - u \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u \cdot \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{du}{u} = \operatorname{ctg} x \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow$$

$$\ln u = \ln \sin x \Rightarrow u = \sin x$$

Для определения функции $v(x)$, найденное значение функции $u(x)$ подставляем в уравнение(2) системы, получим:

$$\sin x \cdot v' = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\operatorname{ctg} x + c$$

Записываем общее решение данного уравнения в виде $y = u \cdot v$ или

$$y = \sin x(-\operatorname{ctg} x + c) \Rightarrow y = \sin x \left(-\frac{\cos x}{\sin x} + c \right) \Rightarrow$$

$$y = -\cos x + c \sin x - \text{общее решение.}$$

Б) Решить дифференциальные уравнения второго порядка.

1) Найти общее решение уравнения $y'' = x^2 - 3x + 1$

Решение. Последовательно интегрируя два раза данное уравнение, получим:

$$y' = \int (x^2 - 3x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x + c_1 \right) dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

2) Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$, которое имеет два различных действительных корня $k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 4; \\ k_2 = 2. \end{cases}$

Тогда по таблице 3 (пункт 1), общее решение исходного уравнения этого дифференциального уравнения запишется в виде: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

3) Найти частное решение уравнения $y'' - 8y' + 16y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

Решение.

Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 16 = 0$ имеет два равных действительных корня $k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4 \Rightarrow k_1 = k_2 = 4$, поэтому общее

решение уравнения по таблице 3 (пункт 2) имеет вид: $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

Для нахождения частного решения, найдем производную общего решения $y = 4C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + 4C_2 x e^{4x} = e^{4x}(4C_1 + C_2 + 4C_2 x)$.

Подставляя начальные условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$ в выражения для y и y' , получим систему уравнений относительно C_1 и

$$C_2: \begin{cases} 2 = \tilde{N}_1 e^0 + C_2 0 e^0 \\ 5 = e^0 (4C_1 + C_2 + 4C_2 \cdot 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ 4C_1 + C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -3 \end{cases}.$$

Подставим решения системы в общее решение:

$y = e^{4x}(2 - 3x)$ - частное решение.

4) Найти общее решение уравнения $y'' - 14y' + 50y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 14k + 50 = 0$. Решая квадратное уравнение, получим $D = 196 - 200 = -4 < 0$, следовательно, оно имеет два комплексных сопряженных корня: $k_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{4i^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 7 + i \\ k_2 = 7 - i \end{cases}$,

где i – мнимая единица, $i^2 = -1$, $\alpha = 7$, $\beta = 1$.

Тогда по таблице 3 (пункт 3) общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{7x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Таблица 3.

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Общее решения
1. $D > 0$ $k_1 \neq k_2$ - действительные различные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $D = 0$ $k_1 = k_2$ - действительные равные корни.	$y = C_1 e^{k_2 x} + C_2 x e^{k_2 x} = e^{k_2 x}(C_1 + C_2 x)$
3. $D < 0$ $\begin{cases} k_1 = \alpha + \beta \cdot i \\ k_2 = \alpha - \beta \cdot i \end{cases}$ комплексные сопряженные.	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Тема:8. Теория вероятностей.

1. Случайная величина.

№111-120. Задан закон распределения случайной величины X (в первой строке таблицы даны возможные значения величины X , а во второй строке указаны вероятности p этих возможных значений).

Найти: 1) математическое ожидание $M(X)$; 2) дисперсию $D(X)$; 3) среднее квадратическое отклонение σ .

111.

X	10	12	20	25	30
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

112.

X	8	12	18	24	30
p	0,3	0,15	0,25	0,2	0,1

113.

X	30	40	50	60	70
p	0,5	0,15	0,2	0,05	0,1

114.

X	21	25	32	40	50
p	0,1	0,25	0,3	0,2	0,15

115.

X	10	12	16	18	20
p	0,25	0,2	0,4	0,1	0,05

116.

X	11	15	20	25	30
p	0,4	0,2	0,15	0,2	0,05

117.

X	12	16	21	26	30
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

118.

X	13	17	22	27	30
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

119.

X	14	18	23	28	30
p	0,1	0,4	0,3	0,15	0,05

120.

X	15	20	24	29	30
p	0,1	0,2	0,25	0,05	0,4

Решение типового примера

Задан закон распределения дискретной случайной величины:

x_i	-1	6	13	20	27
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение. Начертить многоугольник распределения заданной случайной величины и показать на чертеже вычисленные математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 p_i$$

и по упрощенной формуле $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$, где $M(x^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$.

Расчёт числовых характеристик по этим формулам будет производиться с помощью таблицы:

Таблица

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i - M(x)$	$(x_i - M(x))^2$	$(x_i - M(x))^2 p_i$	$x_i^2 p_i$
-1	0,2	-0,2	-13,3	176,89	35,378	0,2
6	0,1	0,6	-6,3	39,69	3,969	3,6
13	0,4	5,2	0,7	0,49	0,196	67,6
20	0,2	4,0	7,7	59,29	11,858	80,0
27	0,1	2,7	14,7	216,09	21,609	72,9
Σ	1	12,3			73,010	114,3

Из таблицы имеем $M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 12,3$. $D(x) = M(x^2) - M^2(x)$,

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 224,3, \quad D(x) = 224,3 - (12,3)^2 = 224,3 - 151,29 = \\ = 73,01, \quad \sigma(x) = 8,544 \approx 8,5.$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{73,01} \approx 8,544 \approx 8,5.$$

Делаем чертёж. По оси абсцисс откладываем в выбранном масштабе значение случайной величины, по оси ординат – соответствующие вероятности. Масштаб по осям откладываем разный. Строим точки с координатами $M_1(-1;0,2)$, $M_2(6;0,1)$, $M_3(13;0,4)$, $M_4(20;0,2)$, $M_5(27;0,1)$.

Полученные точки соединяем прямыми линиями. Получаем многоугольник распределения вероятностей заданный случайной величины.

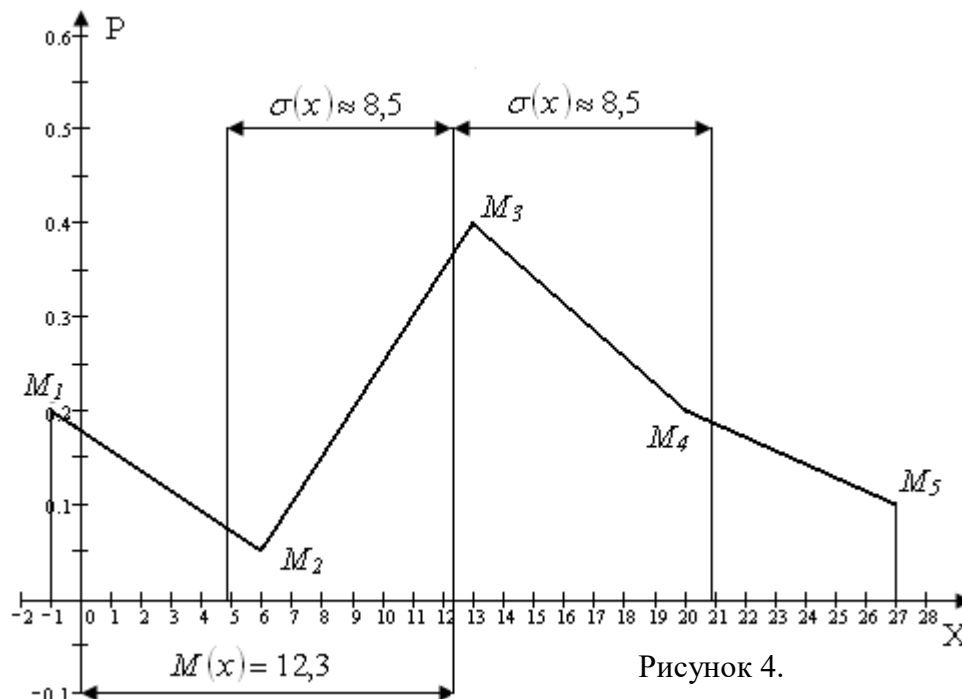


Рисунок 4.

Вычисленное значение математического ожидания откладываем от начала координат по оси абсцисс $M(x) = 12,3$. От значения математического

ожидания вправо и влево откладываем отрезки размером в одно среднее квадратичное отклонение.

Чертеж представлен на рис.4

2. Нормальный закон распределения

№ 121 – 130 Предполагается, что фактический расход некоторых семян на 1 га является нормально распределенной величиной. Норма высева этих семян на 1 га - α кг, случайные значения характеризуются средним квадратическим отклонением σ кг.

Найдите:

- 1) дифференциальную функцию распределения расхода семян на 1 га;
- 2) вероятность того, что расход семян на 1 га будет содержаться в интервале от α кг до β кг;
- 3) вероятность того, что абсолютная величина отклонения расхода семян на 1 га от своей нормы не превышает ε ;
- 4) определить весь диапазон изменения расхода высева данных семян.

№ вар.	$\alpha_{\text{кг}}$	$\sigma_{\text{кг}}$	$\alpha_{\text{кг}}$	$\beta_{\text{кг}}$	$\varepsilon_{\text{кг}}$
121	170	12	165	172	15
122	150	9	143	155	11
123	165	11	160	170	12
124	145	6	141	150	8
125	175	14	170	180	17
126	180	10	175	186	12
127	170	11	162	178	14
128	155	12	148	163	15
129	182	10	175	190	17
130	162	8	152	168	10

Решение типового примера

Фактический расход некоторых семян на 1 га является нормально распределенной величиной. Средний расход при высева этих семян на 1 га - 160 кг, случайные значения характеризуются средним квадратическим отклонением $\sigma=8$ кг.

Требуется найти:

- 1) дифференциальную функцию;
- 2) вероятность того, значения случайной величины будут содержаться в интервале от 155кг до 170 кг;
- 3) вероятность того, что абсолютная величина отклонения расхода семян на 1 га от своей нормы не превышает 12кг;
- 4) весь диапазон изменения расхода семян.

Решение.

1) Случайная величина X имеет нормальное распределение, если её плотность распределения имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a = M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma = \sigma(x)$ – среднее квадратичное отклонение.

В нашей задаче $a = 160 \text{ кг}$, $\sigma = 8 \text{ кг}$, тогда $f(x) = \frac{1}{12 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-160)^2}{128}}$.

2) Вероятность попадания нормально распределенной случайной в заданный интервал вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интегральная функция Лапласа (табл. 1 приложения).

В нашем случае $a = 160$, $\sigma = 8$, $\alpha = 155$, $\beta = 170$.

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} P(155 < X < 170) &= \Phi\left(\frac{170 - 160}{8}\right) - \Phi\left(\frac{155 - 160}{8}\right) = \Phi\left(\frac{10}{8}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{8}\right) = \\ &= \Phi(1,5) + \Phi(0,625) = 0,3944 + 0,2357 = 0,6301. \end{aligned}$$

Итак, у 63,01% семян расход при высеве будет заключен в интервале (155 – 170) кг.

3) Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклонится от математического ожидания меньше чем на величину ε равна:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Вероятность предельного отклонения 12 кг можно вычислить, подставляя данные задачи в формулу:

$$P(|X - a| < 12) = 2\Phi\left(\frac{12}{8}\right) = 2\Phi(1,5) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664$$

С вероятностью 0,8664 можно гарантировать, что отклонение расхода семян от среднего значения будет меньше 12 кг.

4) Для нахождения всего диапазона изменения расхода данных семян при высеве на 1 га воспользуемся правилом трех сигм для нормально распределенной случайной величины, которое состоит в следующем: если

случайная величина распределена по нормальному закону, то почти все ее значения попадают в интервал, $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$ который является диапазоном изменения значения случайной величины.

В нашем примере получим: $(160 - 3 \cdot 8; 160 + 3 \cdot 8) \Rightarrow (136; 184)$, таким образом, расход семян на 1 га будет колебаться в пределах от 136 кг до 184 кг.

Тема:9. Математическая статистика.

1) Исследование вариационных рядов.

№131-140 заданы результаты наблюдения за количеством выпавших осадков. Требуется: 1) получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот; 2) вычислить среднюю $\bar{X}$, дисперсию S^2 , среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации V , ошибку средней $S_{\bar{x}}$; 3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней $\bar{X}_g$.

Результаты наблюдений представлены в таблице 1.

Таблица 1.

№	№задачи									
	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
1	39	26	24	35	28	37	46	26	28	40
2	32	32	36	26	31	38	37	42	40	38
3	31	36	38	39	36	26	29	40	31	32
4	26	33	30	32	32	34	35	32	29	30
5	32	45	36	35	29	42	42	38	38	42
6	27	35	39	45	30	40	40	28	32	36
7	28	36	26	26	36	28	44	30	29	35
8	40	32	27	27	30	32	28	31	31	24
9	37	43	30	36	37	34	28	46	30	34
10	35	37	32	34	36	41	32	42	36	30
11	39	35	28	32	36	25	38	38	35	31
12	34	28	31	26	30	32	34	28	40	26
13	28	32	28	32	36	42	42	45	28	38
14	32	35	29	23	32	29	28	38	31	25
15	27	28	37	28	28	41	33	34	33	26
16	40	32	36	32	33	37	41	36	39	39
17	35	31	31	43	24	28	29	44	37	41
18	26	32	35	40	38	38	33	45	36	35
19	37	26	32	35	36	41	36	29	35	40
20	30	35	30	35	30	35	45	30	31	34

Решение типового примера.

Дана случайная выборка, состоящая из 20 вариантов: 35,9; 35,3; 42,7; 46,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 38,8; 38,4; 31,3; 35,9; 33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8.

Требуется:

- 1) получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот;
- 2) найти основные выборочные характеристики: $\bar{X}$, S^2 , S_x , V , S ;
- 3) с надежностью 95% найти доверительный интервал для оценки генеральной средней $\bar{X}_g$.

Решение.

- 1) Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е. располагая их в порядке возрастания:

25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,3; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Для того чтобы составить вариационный интервальный ряд найдем размах вариации выборки по формуле $\Delta X = X_{\max} - X_{\min}$. Максимальное значение $X_{\max} = 46,2$, а минимальное - $X_{\min} = 25,9$, тогда $\Delta X = 46,2 - 25,9 = 20,3$. Этот размах разбиваем на определенное количество классов. При малом объеме выборке (20-40 вариантов) берется 5-6 классов. Длину классического интервала находим по формуле:

$$\Delta X_i = \frac{\Delta}{5} = \frac{20,3}{5} = 4,06 \approx 4,1$$

Получим 5 интервалов: первый 25,9 - 30,0; второй 30,0 - 34,1; третий 34,1 - 38,2; четвертый 38,2 - 42,3; пятый 42,3 - 46,4.

С помощью ранжированного ряда определим частоту попадания вариантов выборки в каждый интервал. В первый интервал попадет два значения (25,9 и 27,0), поэтому $m_1 = 2$. Во второй интервал попадают четыре значения (30,8; 31,3; 33,4; 33,7), поэтому $m_2 = 4$. Аналогично $m_3 = 7$, $m_4 = 4$, $m_5 = 3$.

Полученный интервальный вариационный ряд запишем в виде таблицы:

Таблица.

	Интервал значений $a_i - b_i$	Частоты вариант m_i	Относительные частоты ω_i	Плотность относительных частот P'_i
1	25,9 – 30,0	2	0,1	0,024
2	30,0 – 34,1	4	0,2	0,049
3	34,1 – 38,2	7	0,35	0,085

4	38,2 – 42,3	4	0,2	0,049
5	42,3 – 46,4	3	0,15	0,037
Σ			1, 00	

Относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал находим по формуле: $\omega_i = \frac{m_i}{n}$, где m_i - частота каждого интервала, а n - объем выборки. В нашей задаче $n = 20$.

$$\omega_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad \omega_2 = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$\omega_3 = \frac{7}{20} = 0,35; \quad \omega_4 = \frac{4}{20} = 0,2; \quad \omega_5 = \frac{3}{20} = 0,15$$

Для проверки вычисляем сумму относительных частот, она должна равняться 1, т. е. $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Так как в нашем случае $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, то вычисления сделаны правильно.

По формуле $P'_i = \frac{\omega_i}{\Delta x}$ вычислим плотности P'_i относительных частот вариантов.

Получаем:

$$P_1 = \frac{0,1}{4,1} = 0,0244 \approx 0,024; \quad P_2 = \frac{0,2}{4,1} = 0,0488 \approx 0,049$$

$$P_3 = \frac{0,35}{4,1} = 0,0854 \approx 0,085; \quad P_4 = \frac{0,2}{4,1} = 0,0488 \approx 0,049$$

$$P_5 = \frac{0,15}{4,1} = 0,0366 \approx 0,037$$

Полученные результаты записываем в таблицу.

Строим гистограмму относительных частот (рисунок 5) – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются классовые интервалы, а высотами соответствующие значения плотностей относительных частот P'_i . Классовые интервалы откладывают на оси абсцисс, а значения P'_i откладывают на оси ординат, масштаб выбираем разный по осям.

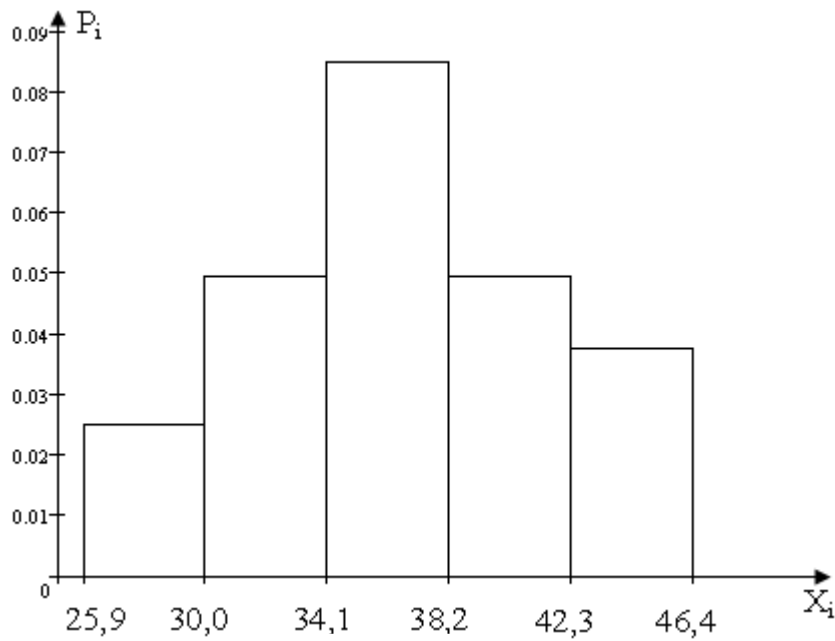


Рисунок 5.

2) Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \text{выборочная средняя};$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \text{дисперсия};$$

$$S = \sqrt{S^2} - \text{среднее квадратическое отклонение};$$

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} - \text{ошибка средней};$$

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% - \text{коэффициент вариации}.$$

Расчет $\bar{X}$ и S^2 производим с помощью таблицы 2.

Просуммировав варианты x_i , занесем сумму $\sum x_i$ в нижнюю строку таблицы под вторым столбцом.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{720,3}{20} = 36,015 \approx 36,0$$

Округляем значение средней выборочной до десятичных. Заполняем третий столбец таблицы, в которой записываем значения отклонений, т. е. разности $x_i - \bar{x}$. Для контроля можно вычислить сумму всех отклонений. Если разности вычислены правильно, то их сумма равна нулю. Затем значения отклонений возводим в квадрат и заполняем последний столбец таблицы. Вычислим сумму $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 490,05$ и разделив ее на $n-1 = 20-1 = 19$, получим значение дисперсии:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{19} = \frac{490,05}{19} \cong 25,7921 \approx 25,79.$$

Далее находим среднее квадратическое отклонение выборочное:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{25,7921} = 5,0786 \approx 5,08 \quad \text{и} \quad \text{ошибку} \quad \text{средней}$$

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{5,08}{\sqrt{20}} \approx \frac{5,08}{4,47} \approx 1,1365 \quad S_x = 1,14.$$

Таблица 2.

№ $\frac{n}{n}$	Результат наблюдения x_i	Отклонение $x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2	3	4
1	25,9	-10,1	102,1
2	27,0	-9,0	81,00
3	30,8	-5,2	27,04
4	31,3	-4,7	22,09
5	33,4	-2,6	6,76
6	33,7	-2,3	5,29
7	34,2	-1,8	3,24
8	35,3	-0,7	0,49
9	35,3	-0,7	0,49
10	35,5	-0,5	0,25
11	35,9	-0,1	0,01
12	35,9	-0,1	0,01
13	37,4	1,4	1,96
14	38,4	2,4	5,76
15	38,6	2,6	6,76
16	38,8	2,8	7,84
17	40,9	4,9	24,01
18	42,7	6,7	44,89
19	44,1	8,1	65,61
20	46,2	10,2	104,04
Σ	720,3		490,05

Вычисляем коэффициент вариации

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{5,08}{36,0} \cdot 100\% \approx 0,141 \cdot 100\% \cong 14,1\%.$$

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость выборки следует считать средней.

3) Доверительный интервал для оценки генеральной средней определяем по формуле:

$$\bar{X}_s - t \cdot S_{\bar{x}} < \bar{X}_r < \bar{X}_s + t \cdot S_{\bar{x}}.$$

Так как выборка маленькая, то ошибка репрезентативности подчиняется закону распределения Стьюдента и параметр t находится с помощью таблицы приложения 2 методического указания.

$t_\gamma = t(\gamma, n)$, где γ - заданная надежность, а n - объем выборки.

В нашем примере $\gamma = 95\% = 0,95$, $n = 20$ по таблице имеем $t_\gamma = t(0,95; 20) = 2,093$. Вычислим теперь радиус доверительного интервала:

$$t \cdot S_{\bar{x}} = 2,093 \cdot 1,14 \approx 2,386 \approx 2,39.$$

Таким образом, с надежностью 95% можно утверждать, что значение генеральной средней исследуемого признака заключено в пределах:

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot S_{\bar{x}} = 36,00 - 2,37 = 33,63 \text{ (гарантированный минимум)}$$

$$\text{до } \bar{X} + t_\gamma \cdot S_{\bar{x}} = 36,00 + 2,37 = 38,37 \text{ (возможный максимум).}$$

2) Корреляционный и регрессионный анализ.

№141 – 150. Заданы зависимости двух случайных величин X и Y : 1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками; 2) составить уравнение прямой регрессии Y на X ;

3) нанести на чертеже исходные данные и построить прямую регрессии.

Данные результатов обследования заданы в таблицах 3 и 4.

Таблица 3.

№ наблюдения	№ задачи									
	141		142		143		144		145	
1	97	35	93	36	104	31	95	36	102	32
2	104	31	101	31	98	35	90	37	95	37
3	103	32	95	34	100	32	103	32	97	35
4	98	34	97	35	102	31	104	31	98	34
5	101	30	102	30	99	32	89	37	94	37
6	102	33	94	35	97	33	97	35	90	38
7	100	31	96	36	95	36	101	34	100	30
8	99	34	100	31	101	32	96	34	101	31
9	96	35	95	36	103	30	99	33	93	36
10	98	32	92	37	98	35	102	32	96	35

Таблица 4.

	№ задачи									
	146		147		148		149		150	
1	91	62	82	51	103	79	85	56	97	61
2	86	43	101	59	96	61	94	63	89	48
3	94	60	105	78	93	59	92	60	95	59
4	95	73	96	63	100	68	104	70	106	75
5	104	87	98	73	89	55	101	64	98	62

6	92	65	112	68	97	70	98	59	92	67
7	98	79	106	68	98	66	93	61	85	60
8	84	52	93	62	87	49	94	72	87	54
9	96	65	110	70	106	75	99	58	103	78
10	99	68	91	62	97	61	95	65	97	58

Решение типового примера

Исследование зависимости между двумя признаками X и Y дало следующие значения:

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

- 1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;
- 2) составить уравнение прямой регрессии;
- 3) нанести на чертеже исходные данные и построить полученную прямую регрессии.

Решение. 1) В малых выборках ($n < 30$) коэффициент корреляции рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Промежуточные вычисления удобно проводить в таблице 5, располагая X порядке возрастания.

Вычисляем средние:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}; \quad \bar{X} = \frac{830}{10} = 83, \quad \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n}; \quad \bar{Y} = \frac{600}{10} = 60$$

Заполняем столбцы таблицы. Суммируя элементы в столбцах, находим:

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 990, \quad \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 6854, \quad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2302.$$

Подставляя вычисленные значения в формулу для r , получаем

$$r = \frac{2302}{\sqrt{990} \cdot \sqrt{6854}} = \frac{2302}{2604,9} = 0,8837 \approx 0,88.$$

Вывод: между X и Y существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

Таблица 5.

№ наблюдения	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	69	18	-14	196	-42	1764	588

2	70	48	-13	169	-12	144	156
3	72	42	-11	121	-18	324	198
4	75	31	-8	64	-29	841	232
5	83	56	0	0	-4	16	0
6	90	56	7	49	-4	16	-28
7	90	84	7	49	24	576	168
8	91	68	8	64	8	64	64
9	95	90	12	144	30	900	360
10	95	107	12	144	47	2209	564
Σ	830	600	0	990	0	6854	2302

2) Уравнение прямой регрессии имеет вид:

$$y - \bar{y} = b_{y/x}(x - \bar{x}), \text{ где}$$

$b_{y/x}$ - коэффициент регрессии, определяется по формуле:

$$b_{y/x} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Беря данные из таблицы, получим:

$$b_{y/x} = \frac{2302}{990} = 2,32525 \approx 2,325.$$

Подставляя теперь в уравнение прямой регрессии $\bar{X} = 83$, $\bar{Y} = 60$, $b_{y/x} \approx 2,32$ будем иметь

$$y - 60 = 2,32(x - 83).$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$y = 2,32x - 2,32 \cdot 83 + 60; y = 2,32x - 132,56.$$

3) Нанесем исходные данные на координатную плоскость и построим найденную прямую регрессии (рисунок 6).

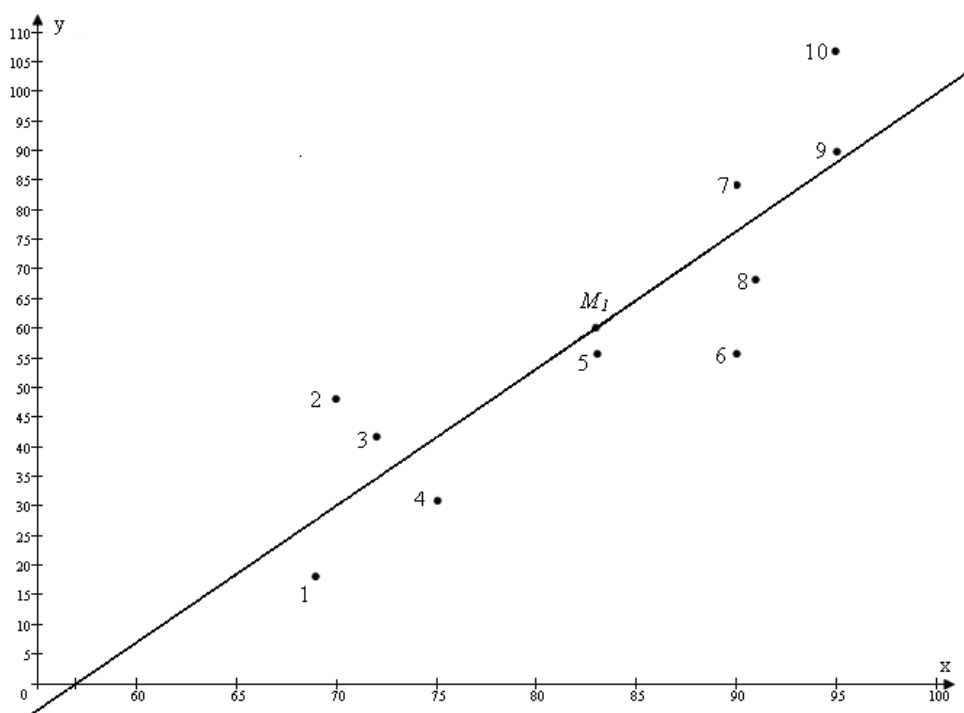


Рисунок 6.

Для того чтобы провести прямую в системе координат, достаточно иметь две точки. Одна точка $M_1(83;60)$. Координаты второй точки M_2 определим, подставив в уравнение регрессии $y = 0$ и вычислив

$$x = \frac{132,56}{2,32} \approx 57.$$

Полученная математическая модель (уравнение прямой регрессии) обладает прогнозирующими свойствами лишь при изменении x от 69 до 95. Так, например, можно с достаточной степенью достоверности считать, что, например при $x=80$ значение y составит $y = 2,32 \cdot 80 - 132,56 \approx 53$.

Таблица 1

Значения функции $p(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$

a/m	0	1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,90484	09048	00452	00015	00000	00000	00000	00000
0,2	81873	16375	01638	00109	00006	00000	00000	00000
0,3	74082	22225	03334	00333	00025	00002	00000	00000
0,4	67032	26813	05363	00715	00072	00006	00000	00000
0,5	69653	30327	07582	01264	00158	00016	00001	00000
0,6	54881	32929	09879	01976	00296	00036	00004	00000
0,7	49659	34761	12166	02839	00497	00070	00008	00001
0,8	44933	35946	14379	03834	00767	00123	00016	00002
0,9	40657	36591	16466	04940	01112	00200	00030	00004
1	36788	36788	18394	06131	01533	00307	00051	00007
2	13534	27067	27067	18045	09022	03609	01203	00344
3	04979	14936	22404	22404	16803	10082	05041	02160
4	01832	07326	14653	19537	19537	15629	10420	05954
5	00674	03369	08422	14037	17547	17547	14622	10445
6	00248	01487	04462	08924	13385	16062	16062	13768
7	00091	00638	02234	05123	09123	12772	14900	14900

Таблица 2

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3824	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2956	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0097	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0036	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Таблица 3

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359	
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753	
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141	
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517	
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879	
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224	
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549	
0,7	2580	2611	2642	2673	2708	2734	2764	2794	2823	2852	
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133	
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389	
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621	
1,1	3643	3665	3696	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830	
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015	
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177	
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319	
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441	
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545	
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633	
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706	
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767	
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817	
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857	
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890	
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916	
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4034	4936	
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4951	
2,6	4953	4955	4956	4067	4959	4960	4961	4962	4963	4964	
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974	
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981	
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986	
x			x			x			x		
3,0	0,49865		3,5	0,49977		4,0	0,499968		4,5	0,4999966	
3,1	0,49903		3,6	0,49984		4,1	0,499979		4,6	0,4999979	
3,2	0,49931		3,7	0,49989		4,2	0,499987		4,7	0,4999987	
3,3	0,49952		3,8	0,49993		4,3	0,499991		4,8	0,4999992	
3,4	0,49966		3,9	0,49995		4,4	0,499995		4,9	0,4999995	

Таблица 4.

Таблица значений $t_{\gamma} = t(\gamma; n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	,862	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Савельева Екатерина Владимировна

Высшая математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки: 35.03.04 Агрономия; 35.03.03 Агрохимия и агропочвоведение; 35.03.07 Технология производства и переработка с/х продукции; 36.03.01 Ветеринарно-санитарная экспертиза; 36.03.02 Зоотехния; 35.03.01 Лесное дело и специальности 36.05.01 Ветеринария.

Электронное задание