

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Комин Андрей Дмитриевич

Должность: ректор

Дата подписания: 25.11.2024 00:40:38

Уникальный программный ключ:

f6c6d686f0c899fdf76a1ed8b448452ab8cac6fb1af6547b6d40cdf1bdc60ae2

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ПРИМОРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНО-
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПРИНЯТО
на заседании Ученого Совета
ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ
Протокол № 17
от 26. 06. 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ
_____ А. Э. Комин
26. 06. 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

(код и наименование направления подготовки)

Математика и физика

(направленность (профиль) подготовки)

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Уссурийск 2023 г.

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

а. модели контролируемых компетенций

К

о

МКод компетенции	Наименование компетенции	Код индикатора достижения компетенции	Наименование индикатора достижения компетенции
Общепрофессиональные компетенции			
ОПК-5	Способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении	ОПК 5.2	Осуществляет контроль и оценку образовательных результатов на основе принципов объективности и достоверности
ОПК-8	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК 8.1	Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области

р

у

е

б. требование к результатам освоения дисциплины

м

ы

е

в

д

о

с

т

р

е

н

д

р

у

д

о

д

р

а

т

т

е

б

о

д

о

с

в

о

е

н

и

и

я

я

д

и

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 1 – Оценка контролируемой компетенции дисциплины (модуля)

№ п/п	Код контролируемой компетенции (индикатора достижения компетенции)	Контролируемые результаты обучения	Наименование оценочного средства
1	ОПК 5.2	<i>Знать:</i> теоретические основы и методы алгебры и теории чисел в соотношении и связи с содержанием школьного курса математики, методы и способы контроля и оценки образовательных результатов по математике на основе принципов объективности и достоверности	Опрос (устно) Тест (письменно)
		<i>Уметь:</i> использовать методы алгебры и теории чисел в соотношении и связи с содержанием школьного курса математики; способы, средства и инструменты для определения образовательных результатов обучающихся, наиболее целесообразные с точки зрения их эффективности; оперировать специальными научными знаниями алгебры и теории чисел в профессиональном общении и предметной области	Тест (письменно)
2	ОПК 8.1	<i>Знать:</i> основные понятия и методы алгебры и теории чисел, необходимые для осуществления профессиональной педагогической деятельности при преподавании математических дисциплин	Опрос (устно) Тест (письменно)
		<i>Уметь:</i> применять знания алгебры и теории чисел в решении задач, применять методы алгебры и теории чисел для решения задач, возникающих в процессе осуществления профессиональной педагогической деятельности; самостоятельно работать с математической учебной, научной и методической литературой	Тест (письменно)

Таблица 2 – Критерии и шкалы для оценки уровня сформированности компетенции в ходе освоения дисциплины

Показатели оценивания	Критерии оценки уровня сформированности компетенции ОПК 5.2 (ОПК 8.1)*			
	Неудовлетворительно, Не зачтено	Удовлетворительно, зачтено	Хорошо / зачтено	Отлично / зачтено
«Знать»	Уровень знаний ниже минимально допустимых требований; имеют место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний; допущено множество негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе; допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе; без ошибок
«Уметь»	При решении типовых (стандартных) задачи не продемонстрированы некоторые основные умения. Имеют место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые (стандартные) задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, некоторые – на уровне хорошо закрепленных навыков. Решены все основные задачи с отдельными несущественными ошибками. Выполнены все задания в полном объеме, без недочетов.
Характеристика сформированности компетенции	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний и умений недостаточно для решения практических профессиональных задач	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний и умений в целом достаточно для решения стандартных практических профессиональных задач, но требуется дополнительная практика по большинству практических задач	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний и умений в целом достаточно для решения стандартных практических профессиональных задач	Сформированность компетенции полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний и умений и мотивации в полной мере достаточно для решения сложных практических профессиональных задач
Уровень сформированности компетенции	Низкий	Пороговый	Базовый	Высокий
Сумма баллов (Б)**	0 – 60	61 – 75	76 – 85	86 – 100

* – Оценивается для каждой компетенции отдельно.

** – Суммируется балл по показателям оценивания «знать» и «уметь»; при этом соотношение компонентов компетенции в общей трудоемкости дисциплины «знать» / «уметь» составляет 40 / 60.

3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений и опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

Промежуточная аттестация качества подготовки обучающихся по дисциплине проводится в соответствии с локальными нормативными актами Университета и является обязательной, предназначена для определения степени достижения учебных целей по дисциплине и проводится в форме зачета во 2,3 семестрах и экзамена в 1,4 семестрах.

Обучающиеся готовятся к экзамену (зачету) самостоятельно. Подготовка заключается в изучении программного материала дисциплины с использованием личных записей, сделанных в рабочих тетрадях, и рекомендованных в процессе освоения дисциплины информационных источников. При необходимости обучающиеся обращаются за консультацией к преподавателю, ведущему данную дисциплину.

Форма проведения промежуточной аттестации для обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья выбирается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п.). При необходимости обучающимся инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене (зачете).

Методика оценивания

1) По столбальной шкале в таблицу 3 занести баллы (B_i), полученные обучающимся в ходе освоения дисциплины. (Критерии представлены в таблице 2).

Таблица 3 – Пример расчетной таблицы итогового оценивания компетенций у обучающегося по дисциплине (модулю) «Алгебра и теория чисел»

Код индикатора компетенции	Условное обозначение	Оценка приобретенных компетенций в баллах
ОПК 5.2	B1	76
ОПК 8.1	B2	86
Итого	($\sum B_i$)	162
В среднем	($\sum B_i$)/ n	81

2) Определить оценку по дисциплине (модулю) по шкале соотношения баллов и оценок (таблица 4).

Таблица 4 – Шкала измерения уровня сформированности компетенций в результате освоения дисциплины (модуля) «Алгебра и теория чисел»

Итоговый балл	0-60	61-75	76-85	86-100
Оценка	Неудовлетворительно (не зачтено)	Удовлетворительно (зачтено)	Хорошо (зачтено)	Отлично (зачтено)
Уровень сформированности компетенций	низкий	Пороговый	Базовый	Высокий

Знания, умения обучающихся при промежуточной аттестации **в форме зачета** определяются «зачтено», «не зачтено».

«Зачтено» – обучающийся знает курс на уровне лекционного материала, базового учебника, дополнительной учебной, научной и методологической литературы, умеет привести разные точки зрения по излагаемому вопросу.

«Не зачтено» – обучающийся имеет пробелы в знаниях основного учебного материала, допускает принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.

Показатели «знать», «уметь» **при промежуточной аттестации в форме экзамена** определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», что соответствует уровням сформированности компетенций «высокий», «базовый», «пороговый», «низкий».

«Отлично» – обучающийся глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с задачами и практическими заданиями, правильно обосновывает принятые решения, умеет самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок.

«Хорошо» – обучающийся твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических заданий.

«Удовлетворительно» – обучающийся усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения в выполнении практических заданий.

«Неудовлетворительно» – обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания, задачи.

Текущая аттестация обучающихся по дисциплине (модулю) «Алгебра и теория чисел» проводится в форме контрольных мероприятий по оцениванию фактических результатов освоения дисциплины (модуля) в разрезе компетенций.

4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Тестовые задания

ОПК 5.2 Осуществляет контроль и оценку образовательных результатов на основе принципов объективности и достоверности

1 семестр

Задание 1.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Выберите ложное утверждение

1. для любых чисел a, b и c из $a:b$ и $b:c$ следует $a:c$
2. если $a:c$ и $b:c$, то $(a+b):c$

3. если a делится на c , а b не делится на c , то $a \pm b$ не делится на c
 4. если $(a \cdot b)$ делится на c , то либо a делится на c , либо b делится на c

Ответ: 4.

Обоснование: утверждение 4 является ложным, так как, например, произведение чисел 15 и 10 делится на третье число 6, в то время, как ни один из сомножителей не делится на 6, другие же приведенные утверждения являются свойствами делимости, следовательно, истинны

Задание 2.

Прочитайте текст и установите соответствие

При делении целого числа a на целое число $b \neq 0$ найдены два таких целых числа q и r , что выполняются условия: 1) $a = bq + r$; 2) $0 \leq r < |b|$. Установите терминологическое соответствие для всех перечисленных чисел:

А	a	1	Остаток
Б	b	2	Неполное частное
В	q	3	Делимое
Г	r	4	Делитель

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
2	4	2	1

Задание 3.

Прочитайте текст и установите соответствие

Установите соответствие между условием и количеством решений для сравнения первой степени вида $ax \equiv b \pmod{m}$:

1	$(a, m) = 1$	1	Нет решений
2	$(a, m) = d > 1$, b не делится на d	2	Единственное решение
3	$(a, m) = d > 1$, b делится на d	3	Несколько решений

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В
2	1	3

Задание 4.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются:

1. сопряженными
2. противоположными
3. обратными
4. мнимыми

Ответ: 1.

Обоснование: Согласно определению числа $a + bi$ и $a - bi$ называются сопряженными

Задание 5.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

На координатной плоскости число изображается:

1. точкой или радиус-вектором
2. отрезком
3. плоской геометрической фигурой
4. заштрихованной частью плоскости

Ответ: 1

Обоснование: Комплексное число $z = a + bi$ изображают точкой на плоскости, приняв числа a и b за координаты точки, изображающей число z , либо радиус-вектором, исходящим из начала координат в точку, изображающее это число.

Задание 6.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Остаток от деления числа 764 на число (-13) равен

Ответ: 10, так как $764 = (-13) \cdot (-58) + 10$, $0 \leq 10 < |-13|$ по определению о делении с остатком

Задание 7.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Наибольший общий делитель чисел 99 и 162 равен

Ответ: 9, так как при делении по алгоритму Евклида последний ненулевой остаток равен 9

Задание 8.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Наименьшее общее кратное чисел 364 и 143 равно

Ответ: 4004, так как по формуле о нахождении наименьшего общего кратного делим произведение этих чисел на их наибольший общий делитель

Задание 9.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти остаток от деления 243^{132} на 34

Ответ: 13, так как $243 \equiv 5 \pmod{34}$, затем применяя теорему Эйлера и свойства сравнений $5^{132} \equiv 13 \pmod{34}$, получаем остаток 13

Задания 10.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Модуль комплексного числа $z = 4 + 3i$ равен

Ответ: 5, вычисляя по формуле модуля комплексного числа

2 семестр

Задание 11.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Каким из перечисленных свойств НЕ обладают операции над матрицами

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot B = B \cdot A$
3. $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$
4. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Ответ: 2.

Обоснование: Умножение матриц не коммутативно

Задание 12.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Если в ходе последовательного исключения неизвестных в системе линейных уравнений по методу Гаусса получено уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$, $b \neq 0$, то система уравнений:

1. несовместна
2. имеет множество решений
3. совместна для любых коэффициентов при неизвестных
4. имеет единственное, причем тривиальное решение

Ответ: 1.

Обоснование: Уравнению данного вида не удовлетворяет ни один вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, то есть оно является противоречивым, поэтому система уравнений, содержащая уравнение данного вида, является несовместной.

Задание 13.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Пусть ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен r , а ранг расширенной матрицы равен r^* . Система совместна тогда и только тогда когда

1. $r = r^*$
2. $r \geq r^*$
3. $r < r^*$
4. $r \leq r^*$

Ответ: 1.

Обоснование: По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы

Задание 14.

Прочитайте текст и установите соответствие

Путь ранг основной матрицы системы линейных уравнений, имеющей n неизвестных, равен r , а ранг расширенной матрицы равен r^* . Установите соответствие между условием и количеством решений системы:

А	$r < r^*$	1	Система имеет единственное решение
Б	$r = r^* = n$	2	Система имеет бесконечное множество решений
В	$r = r^* < n$	3	Система имеет ровно n решений
		4	Система не имеет решений

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В
4	1	2

Задание 15.

Прочитайте текст, выберите правильные ответы и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответов

Что из перечисленного относится к элементарным преобразованиям систем линейных уравнений?

1. исключение любого уравнения из системы
2. исключение из системы линейного уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом
3. присоединение к системе линейного уравнения с нулевыми коэффициентами и ненулевым свободным членом
4. прибавление к обеим частям какого-либо уравнения системы соответствующих частей другого уравнения системы, умноженных на скаляр

Правильный ответ: 2, 4

Обоснование: К элементарным преобразованиям систем линейных уравнений относят преобразования, которые не изменяют множество решений системы, то есть, получаемая в результате них система, является равносильной исходной.

Задание 16.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Выражение $2A+3E$ при $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ равно матрице ...

1. $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: 3.

Обоснование: Ответ получен, выполняя последовательно операции над матрицами: умножение матрицы на число 2А, 3Е; сложение матриц 2А, 3Е

Задание 17.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: **3**, так как, приводя матрицу к ступенчатому виду, получаем 3 ненулевых строки

Задание 18.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Выяснить, является ли совместной система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Ответ: **несовместна**, так как ранг основной матрицы данной системы равен 2, а ранг расширенной матрицы равен 3

Задание 19.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Определить количество решений, входящих в фундаментальную систему решений, для данной однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Ответ: **3**, так как по теореме о числе решений фундаментальной системы решений получаем $5-2=3$, где 5 – число переменных, а 2 – ранг основной матрицы системы

Задание 20.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, тогда определитель $|A \cdot B|$ равен

1. 0
2. 3
3. 11
4. 15

Ответ: 3

Обоснование: Выполняя умножение матриц А, В, получим матрицу $A \cdot B = (11)$, определитель которой равен 11

3 семестр

Задание 21.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

В линейно независимой системе векторов, являющихся линейными комбинациями n векторов, число векторов не может быть...

1. больше n
2. меньше n
3. больше $n + 1$
4. меньше $n - 1$

Ответ: 1.

Обоснование: По теореме о линейной зависимости векторов, если каждый вектор линейно независимой системы, состоящей из m векторов, есть линейная комбинация n векторов, то m не может быть больше n .

Задание 22.

Прочитайте текст, выберите правильные ответы и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответов

Какие требования по определению предъявляются к базису векторного пространства?

1. векторы, входящие в базис, линейно независимы
2. линейная комбинация векторов, входящих в базис, равна нулевому вектору для некоторых скаляров, не всех равных нулю одновременно
3. любой вектор пространства линейно выражается через векторы, входящие в базис
4. линейная комбинация векторов, входящих в базис, равна нулевому вектору для любых скаляров

Ответ: 1,3.

Обоснование: По определению к базису векторного пространства предъявляются два требования: первое – векторы, входящие в базис, линейно независимы, второе – каждый вектор пространства линейно выражается через векторы базиса

Задание 23.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Система n векторов пространства V , имеющего базис e_1, e_2, \dots, e_n , линейно независима тогда и только тогда, когда матрица, составленная из координатных столбцов этих векторов относительно данного базиса, является ... (вставить пропуск в виде слова в соответствующем падеже)

Ответ: невырожденной, по следствию из теоремы о линейной зависимости системы координатных столбцов векторов в каком-либо базисе пространства

Задание 24.

Прочитайте текст, выберите правильные ответы и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответов

Выберите условия, выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы непустое подмножество L векторного пространства V над полем F было подпространством

1. если $x, y \in L$, то $x + y \in L$
2. если $x, y \in L$, то $x + y \in V$
3. если $x \in L$, то $\lambda x \in V$
4. если $x \in L$, то $\lambda x \in L$

Ответ: 1,4.

Обоснование: Для того чтобы непустое подмножество L векторного пространства V над полем F было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы операции, определенные в пространстве V были замкнуты относительно L .

Задание 25

Прочитайте текст и установите соответствие

Пусть V_n – векторное пространство над полем F и $\{e\}: e_1, e_2, \dots, e_n, \{e'\}: e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – два его базиса, а также имеют место равенства

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + \dots + \xi'_n e'_n$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$$

Установите соответствие:

А	$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$	1	координатный столбец вектора x в базисе $\{e\}$
Б	$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$	2	матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$
В	T	3	матрица перехода от базиса $\{e'\}$ к базису $\{e\}$
Г	T^{-1}	4	координаты вектора x в базисе $\{e\}$

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
4	1	2	3

Задания 26.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Выяснить, является ли множество невырожденных матриц второго порядка с элементами из R векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения на число над полем R

Ответ: **не является**, так как сложение во множестве невырожденных матриц не является алгебраической операцией

Задание 27.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Выяснить, является ли совокупность решений однородной системы s линейных уравнений с n неизвестными и с коэффициентами из поля R векторным пространством над полем R

Ответ: **является**, так как для любых двух решений однородной системы линейных уравнений сумма решений и произведение решения на произвольный скаляр есть также решения однородной системы, а также выполняются все аксиомы линейного пространства

Задание 28.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

В векторном пространстве $R^{2 \times 2}$ квадратных матриц второго порядка с действительными элементами над полем R выяснить линейную зависимость следующей системы векторов (ответ дать в виде словосочетания: *линейно зависима* или *не линейно независима*)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: **линейно независима**, так как нулевому вектору будет равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов (полученная только с помощью нулевых коэффициентов), а всякая нетривиальная (полученная с помощью коэффициентов, не всех равных нулю) не будет равна нулевому вектору.

Задание 29.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

В векторном пространстве $R^{2 \times 2}$ квадратных матриц второго порядка с действительными элементами над полем R выяснить линейную зависимость следующей системы векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: **линейно зависима**, так как существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, что, как легко видеть, следует из того, что вектор a_3 линейно выражается через остальные векторы системы.

Задания 30.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти координаты вектора $b = (18; 24; 13; 6)$ в базисе

$a_1 = (2; 4; 3; 2), a_2 = (4; 2; 2; 8), a_3 = (4; 5; 8; 7), a_4 = (6; 7; 5; 3)$ **четырёхмерного арифметического пространства R^4 . Ответ записать в виде $(b_1; b_2; b_3; b_4)$**

Ответ: $(2; 0; -1; 3)$, так как $b = 2a_1 - a_3 + 3a_4$

4 семестр

Задание 31

Прочитайте текст и установите соответствие

Многочленом от x над областью целостности P называется выражение вида

$a_s x^{k_s} + a_{s-1} x^{k_{s-1}} + \dots + a_1 x^{k_1} \quad (s \geq 1)$, где a_s, a_{s-1}, \dots, a_1 - элементы из P ,

$k_1 < k_2 < \dots < k_s$ - целые неотрицательные числа, x^0 принимается равным 1, а также принимается, что при любом целом неотрицательном k : $1 \cdot x^k = x^k$

Установите соответствие:

А	a_1, a_2, \dots, a_s	1	старший коэффициент
Б	$a_1x^{k_1}, a_2x^{k_2}, \dots, a_sx^{k_s}$	2	степень многочлена
В	a_s	3	коэффициенты
Г	k_s	4	слагаемые
		5	старшее слагаемое

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
3	4	1	2

Задание 32

Прочитайте текст и установите соответствие

Установите терминологическое соответствие для свойств операций над многочленами:

А	$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$	1	операция сложения обратима
Б	$f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)] = [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x)$	2	операция умножения ассоциативна
В	$[f(x) + g(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)$	3	операция сложения коммутативна
Г	$\forall f(x), g(x) \exists h(x) \quad f(x) + h(x) = g(x)$	4	операция умножения дистрибутивна относительно сложения

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
3	2	4	1

Задание 33

Прочитайте текст и установите соответствие

При делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x) \neq 0$ найдена такая пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, что выполняются условия: 1) $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$; 2) при $r(x) \neq 0$. степень $r(x)$ меньше степени $q(x)$. Установите терминологическое соответствие для всех перечисленных многочленов:

А	$f(x)$	1	Остаток
Б	$g(x)$	2	Неполное частное
В	$q(x)$	3	Делимый
Г	$r(x)$	4	Делитель

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
3	4	2	1

Задание 34.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Неприводимыми над полем действительных чисел могут быть

1. только многочлены первой степени
2. только многочлены второй степени
3. только многочлены выше второй степени
4. только многочлены не выше второй степени

Ответ: 4.

Обоснование: По свойствам многочленов над полем действительных чисел неприводимыми могут быть только многочлены первой и второй степени

Задание 35.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Если $p(x)$ - это простой множитель в каноническом разложении многочлена $f(x)$, то кратность этого множителя равна...

Ответ: 1, так как простым множителем в каноническом разложении многочлена называются неприводимый многочлен с кратностью, равной единице

Задание 36.

Прочитайте текст и установите соответствие

Даны многочлены $f(x) = 2 - 4x + 2x^2$, $g(x) = -4 + x + x^3$ Установите соответствие

А	$f(x) + g(x)$	1	$-x^3 + 2x^2 - 5x + 6$
Б	$f(x) - g(x)$	2	$x^3 - 2x^2 + 5x - 6$
В	$g(x) - f(x)$	3	$2x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 14x - 8$
Г	$f(x) \cdot g(x)$	4	$x^3 + 2x^2 - 3x - 2$
		5	$2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 18x - 8$

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
4	1	2	5

Задание 37.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Найти частное при делении многочлена $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 13x + 2$ на многочлен $g(x) = 2x^2 + 5x - 1$

1. $3x + 1$
2. $3x - 2$
3. $3x + 13$
4. $3x + 2$

Ответ: 2.

Обоснование: При умножении двучлена $3x - 2$ на $g(x)$ получается многочлен $f(x)$

Задание 38.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти остаток при делении многочлена $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ на $g(x) = x + 2$

Ответ: -8, так как при делении этих многочленов, применяя схему Горнера, получаем остаток в последней клетке второй строки

Задание 39.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найдите такие значения a и b , при которых корень $x = -2$ многочлена $f(x) = x^5 + ax^2 + bx + 1$ имел бы кратность k не ниже, чем 2. Ответ запишите в виде $a = \alpha$, $b = \beta$, указав в качестве значений целое число или конечную десятичную дробь

Ответ: $a=32.25$, $b=49$, так как, чтобы число было корнем многочлена кратности не ниже, чем 2, многочлен должен делиться по крайней мере на $(x + 2)^2$, поэтому применяя дважды деление по схеме Горнера, и приравнивая к нулю остатки, получаем требуемые значения.

Задание 40.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Приводим ли над полем рациональных чисел многочлен $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Ответ: приводим, так как многочлен третьей степени приводим над полем рациональных чисел тогда и только тогда, когда он имеет хотя бы один рациональный корень, видим, что $x = 1$ является корнем данного многочлена.

ОПК 8.1 Применяет методы анализа педагогической ситуации, профессиональной рефлексии на основе специальных научных знаний, в том числе в предметной области

1 семестр

Задание 41.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые

1. принадлежат хотя бы одному из множеств A и B
2. принадлежат как множеству A , так и множеству B
3. принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B
4. принадлежат множеству B и не принадлежат множеству A

Ответ: 1.

Обоснование: По определению объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B

Задание 42.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Бинарное отношение ρ на множестве A , если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется:

1. отношением эквивалентности
2. отношением порядка

3. отображением
4. обратимым отношением

Ответ: 1.

Обоснование: По определению бинарное отношение на множестве A называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Задание 43

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Не пересекаются множества:

1. целых и рациональных чисел
2. простых и четных чисел
3. простых и нечетных чисел
4. простых и составных чисел

Ответ: 4.

Обоснование: Всякое целое число может быть либо простым, либо составным, кроме 1, которое не является ни простым, ни составным, поэтому множества простых и составных чисел не содержат общих элементов, следовательно, не пересекаются, другие же перечисленные в парах множества могут содержать общие элементы

Задание 44

Прочитайте текст и установите соответствие

Установите соответствие между логической операцией и её определением.

А	Конъюнкцией двух высказываний A и B называется такое высказывание, которое...	1	ложное в том и только том случае, когда A истинно, а B ложно
Б	Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется такое высказывание, которое...	2	истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны
В	Импликацией двух высказываний A и B называется такое высказывание, которое...	3	истинно в том и только том случае, когда A и B имеют одно и то же истинностное значение
Г	Эквивалентией двух высказываний A и B называется такое высказывание, которое...	4	истинно в том и только том случае, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
2	4	1	3

Задание 45

Прочитайте текст и установите соответствие

Установите соответствие между свойством бинарного отношения и соответствующим свойством графа, представляющего это отношение.

А	бинарное отношение рефлексивное	1	любые две вершины графа соединены ребром
---	---------------------------------	---	--

Б	бинарное отношение антирефлексивное	2	ни одна вершина графа не имеет петли
В	бинарное отношение антисимметричное	3	каждая вершина графа имеет петлю
Г	бинарное отношение связанное	4	граф не имеет неориентированных ребер, но может иметь петли

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
3	2	4	1

Задание 46.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Декартово произведение множеств $A=\{0,-3\}$ и $B=\{-1,2\}$ – это:

1. $AB=\{(0,-1),(-3,2)\}$
2. $AB=\{(0,-1),(-3,-1),(0,2),(-3,2)\}$
3. $AB=\{0,-1\}$
4. $AB=\{0,-1,2,-3\}$

Ответ: 2

Обоснование: По определению прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (x, y) таких, что $x \in A$ и $y \in B$

Задание 47.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Полную систему вычетов по модулю 7 образует следующий набор:

1. 14, 1, 9, -4, 4, 12, 27
2. 0, 1, -2, 10, 24
3. 9, 8, 1, 3, -5, -4, 2, 16
4. 21, 28, 2, -3, 7, -5, 6

Ответ: 1.

Обоснование: Числа образуют полную систему вычетов по модулю 7 тогда и только тогда, когда их точно 7 и они попарно несравнимы по модулю 7.

Задание 48.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Записать комплексное число $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$ в тригонометрической форме

1. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
2. $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

$$3. z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$4. z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

Ответ: 2.

Обоснование: Вычисляя по формулам модуля и аргумента комплексного числа, получаем, что модуль комплексного числа равен 2, а аргумент комплексного числа равен $\frac{2\pi}{3}$

Задание 49.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Вычислить $\sqrt{3-4i}$

1. $\pm(2-i)$
2. $2-i$
3. $i-2$
4. $2-\sqrt{3}i$

Ответ: 1.

Обоснование: По формуле корня квадратного из комплексного числа

Задание 50.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Вычислить: $(1-2i)^4$

1. $3+i$
2. $-7+24i$
3. $16i$
4. $1-16i$

Ответ: 2.

Обоснование: Ответ получен, применяя свойства степеней, путем возведения в квадрат данного числа, а затем снова возведением в квадрат полученного комплексного числа.

2 семестр

Задание 51.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Если существуют скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю, такие что

$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_m \bar{a}_m = \bar{\Theta}$, то система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$:

1. линейно зависимая
2. линейно независимая

3. тривиальная
4. нетривиальная

Ответ: 1.

Обоснование: По определению линейно зависимой системы векторов

Задание 52.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Матрица, полученная из матрицы A в результате замены ее строк соответствующими столбцами этой матрицы, называется:

1. обратной
2. вырожденной
3. треугольной
4. транспонированной

Ответ: 4

Обоснование: По определению транспонированной матрицы

Задание 53.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Определитель изменяет знак при ...

1. умножении всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля
2. прибавлении ко всем элементам какого-нибудь столбца соответствующих элементов другого столбца, умноженных на одно и то же число
3. перестановке двух строк
4. транспонировании

Ответ: 3.

Обоснование: По свойствам определителей если поменять местами две строки (столбца), то определитель изменит знак на противоположный, а по абсолютной величине не изменится.

Задание 54.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Матричное уравнение $AX=B$, где A - невырожденная квадратная матрица, имеет решение:

1. $X=B^{-1}A$
2. $X=A^{-1}B$
3. $X=BA^{-1}$
4. $X=AB^{-1}$

Ответ: 2

Обоснование: Решение данного матричного уравнения получено путем умножения слева на матрицу A^{-1} и применяя свойства операций над матрицами (ассоциативность умножения, $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, где E – единичная матрица)

Задание 55.

Прочитайте текст, выберите правильные ответы и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответов

Какие преобразования не меняют значения определителя

1. операция замены в определителе строк столбцами с сохранением порядка следования
2. замена местами любых двух строк в определителе
3. прибавление ко всем элементам какой-нибудь строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число
4. умножение всех элементов какой-нибудь строки на одно и то же число

Ответ: 1,3.

Обоснование: По свойствам определителей транспонирование значение определителя не изменяет, также значение определителя не изменяется от прибавления ко всем элементам какой-нибудь строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число

Задание 56.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Выяснить, являются ли векторы $\vec{a}_1 = (3; -2)$ и $\vec{a}_2 = (-6; 4)$ линейно зависимыми или линейно независимыми

Ответ: **линейно зависимы**, так как линейная комбинация данных векторов равна нулевому вектору при скалярах не всех равных нулю одновременно, например $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

Задание 57.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Вектор $\vec{p} = (3; 4; -2)$ в базисе $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ имеет вид

1. $\vec{p} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
2. $\vec{p} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$
3. $\vec{p} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$
4. $\vec{p} = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

Ответ: 2, так как $3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (3; 4; -2)$.

Задание 58.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Ответ: **40**, непосредственным вычислением определителя

Задание 59.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Алгебраическое дополнение элемента, находящегося в первой строке и втором столбце

в определителе $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix}$ равно

1. 14
2. -14
3. 24
4. -10

Ответ: 1.

Обоснование: Алгебраическое дополнение элемента, находящегося в первой строке и втором столбце, равно минору этого элемента, то есть определителю, полученному вычеркиванием первой строки и второго столбца, взятому со знаком «-», так как $1+2=3$ (нечетно).

Задание 60.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 8x - 3y + 6z = -2 \end{cases}$$

если известны значения следующих определителей.

Ответ записать в виде (x;y;z)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 8 \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 4 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

Правильный ответ: **(2;4;-1)**, так как значения приведенных определителей позволяют получить решение системы уравнений по формулам Крамера.

3 семестр

Задание 61.

Прочитайте текст, выберите правильные ответы и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответов

При изоморфизме двух линейных пространств R и R'

1. линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему векторов
2. линейно независимая система векторов переходит в линейно зависимую систему векторов

3. линейно независимая система векторов переходит в линейно зависимую или линейно независимую систему векторов
4. линейно независимая система векторов, являющаяся базисом R , переходит в линейно независимую систему, являющуюся базисом R'

Ответ: 1,4.

Обоснование: По свойствам изоморфизма линейных пространств линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему векторов, всякий базис одного пространства переходит в базис другого.

Задание 62.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Евклидовым пространством размерности n называется n -мерное линейное пространство над полем R действительных чисел, в котором каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие

1. вектор этого же пространства
2. арифметический вектор пространства R^n
3. действительное число
4. вектор некоторого пространства над полем R действительных чисел такое же размерности n

Правильный ответ: 3.

Обоснование: По определению евклидова пространства размерности n над полем действительных чисел R каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением этих векторов

Задание 63.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Если ненулевые векторы e_1, e_2, \dots, e_n евклидова пространства E_n попарно ортогональны, то они образуют ... этого пространства (вставить пропуск в виде слова в соответствующем падеже)

Ответ: **базис**, так как любая система ненулевых попарно ортогональных векторов линейно независима по свойствам ортогональности векторов, а всякая линейно независимая система из n векторов является базисом пространства E_n

Задание 64.

Прочитайте текст, выберите правильные ответы и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответов

Два евклидовых пространства E_n и E'_n называются изоморфными, если между ними можно установить биективное соответствие такое, что (выберите требования)

1. $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$
2. $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$
3. $\Phi((x, y)) = (\Phi(x), \Phi(y))$
4. $(x, y) = (\Phi(x), \Phi(y))$

Ответ: 1,2,4.

Обоснование: При изоморфизме евклидовых пространств сохраняется скалярное произведение.

Задание 65.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Собственные значения линейного оператора φ находятся из условия, где A - матрица линейного оператора φ

1. $|A - \lambda E| < 0$
2. $|A - \lambda E| > 0$
3. $|A - \lambda E| = 0$
4. $|A - \lambda E| = 1$

Ответ: 3.

Обоснование: Множество собственных значений оператора φ линейного пространства над числовым полем P совпадает с множеством корней характеристического многочлена оператора φ , принадлежащих полю P

Задание 66.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Найти матрицу перехода от базиса $e_1 = (1;0), e_2 = (0;1)$ к базису $a_1 = (3;-1), a_2 = (1;-2)$ арифметического пространства R^2

1. $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. $T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Ответ: 1.

Обоснование: Очевидно, что $a_1 = 3e_1 - e_2, a_2 = e_1 - 2e_2$. Столбцами матрицы перехода T от базиса e_1, e_2 к базису a_1, a_2 являются координаты векторов a_1, a_2 в базисе e_1, e_2

Задание 67.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Пусть M - векторное пространство всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in R$ над полем R относительно сложения матриц и умножения матрицы на число. Найти размерность пространства M .

Ответ: 2, так как пространство M изоморфно арифметическому пространству R^2 , размерность которого равна 2, следовательно, размерность пространства M равна 2.

Задание 68.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти λ , при котором система векторов $a_1 = (0; 1; \lambda)$, $a_2 = (\lambda; 0; 1)$, $a_3 = (\lambda; 1; \lambda)$ не будет образовывать базис арифметического векторного пространства R^3 . Ответ записать в виде числа.

Ответ: 0, так как при этом значении матрица, составленная из координатных столбцов этих векторов относительно единичного базиса пространства R^3 , является вырожденной, то есть система векторов не будет являться линейно независимой, что нарушает условие для базиса пространства.

Задание 69.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти размерность ядра линейного оператора φ векторного пространства R^4 , задан-

ного в некотором базисе пространства матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: 2, так размерность ядра оператора φ равна разности размерности пространства и ранга линейного оператора, ранг матрицы линейного оператора равен 2, следовательно размерность ядра $4-2=2$

Задание 70.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Найти собственное значение линейного преобразования пространства R^3 , заданного в

некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ записать в виде числа.

Ответ: 2, так как характеристический многочлен данного линейного преобразования имеет только один действительный корень, равный 2

4 семестр

Задание 71.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Всякий многочлен n -ой степени, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность, имеет над полем комплексных чисел

1. меньше n корней
2. не больше n корней
3. ровно n корней
4. бесчисленное множество корней

Ответ: 2.

Обоснование: по следствию из основной теоремы алгебры о существовании корня многочлена

Задание 72.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Сколько действительных корней не может иметь многочлен третьей степени над полем действительных чисел (ответ записать числом)

Ответ: 2, так как многочлен третьей степени над полем действительных чисел может иметь только один или три действительных корня, принимая во внимание то, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.

Задание 73.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Число элементов основного множества G группы $\langle G, * \rangle$ называется ... группы, если G конечно (вставить пропуск в виде слова в соответствующем падеже)

Ответ: порядком, по определению порядка группы

Задание 74.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Мультипликативная группа, основное множество которой состоит из степеней какого-либо одного элемента группы, называется ... (вставить пропуск в виде слова в соответствующем падеже)

Ответ: циклической, по определению циклической группы

Задание 75.

Прочитайте текст и установите соответствие

Установите терминологическое соответствие для кольца $(K, +, \cdot)$, в котором определены две алгебраические операции $+$ сложение и \cdot умножение

А	операция \cdot умножение удовлетворяет требованию $\forall a, b \in K \quad a \cdot b = b \cdot a$	1	кольцо с единицей
Б	операция \cdot умножение удовлетворяет требованию $\forall a, b, c \in K \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	2	ассоциативное кольцо
В	из равенства $a \cdot b = 0$ следует, что хотя бы один из сомножителей a или b равен нулю	3	коммутативное кольцо
Г	существует двусторонний	4	кольцо без делителей нуля

	нейтральный элемент относительно операции \cdot умножения		
--	---	--	--

Запишите выбранные цифры под соответствующими буквами:

А	Б	В	Г
3	2	4	1

Задание 76.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Приводим ли над полем действительных чисел многочлен $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

Ответ: не приводим, так как данный многочлен не имеет ни одного действительного корня

Задание 77.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3$, $g(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

1. $x^3 - x$
2. $x^3 - x + 1$
3. $x^3 - x - 1$
4. $x^3 + 1$

Ответ: 3.

Обоснование: Применяя алгоритм Евклида для данных многочленов, последний не равный нулю остаток и является наибольшим общим делителем многочленов

Задание 78.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Является ли во множестве M невырожденных матриц n -го порядка матричное сложение бинарной операцией? (Ответ запишите в виде: *является* или *не является*)

Правильный ответ: не является, так как можно привести пример двух таких невырожденных матриц, сумма которых является вырожденной матрицей.

Задание 79.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Составляет ли множество M невырожденных матриц n -го порядка группу относительно матричного умножения?

Ответ: составляет, так как матричное умножение является бинарной и выполняются все аксиомы группы: операция умножения ассоциативна, множество содержит единичную матрицу, являющуюся нейтральным элементом относительно матричного умножения, а всякая невырожденная матрица имеет обратную, то есть симметричный элемент относительно матричного умножения.

Задание 80.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Является ли множество M матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $a \in R, a \neq 0$ подгруппой мультипликативной группы G всех невырожденных матриц 2-го порядка

Ответ: является, так как матрица заданного вида является невырожденной, то есть M - подмножество G и выполняются условия признака подгруппы: умножение матриц заданного вида является невырожденной матрицей, для любой матрицы заданного вида существует обратная матрица, которая также является невырожденной.

Задания 81.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ мультипликативной группы невырожденных матриц второго порядка

1. 1
2. 2
3. 4
4. ∞

Ответ: 3.

Обоснование: Порядок элемента равен четырем, так как по определению порядка элемента группы при возведении заданной матрицы в четвертую степень будет получена единичная матрица.

Задание 82.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Является ли кольцом множество L чисел вида $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, где $a, b, c \in Z$ относительно обычных операций сложения и умножения?

Правильный ответ: не является, так как при умножении чисел такого вида будут получаться, в том числе, слагаемые с сомножителем вида $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$, то есть полученное число не будет принадлежать L

Задание 83.

Прочитайте текст, выберите правильный вариант ответа и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа.

Для кольца M вещественных матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ укажите делители нуля $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ этого кольца.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Правильный ответ: 1.

Обоснование: Матрицы будут делителями нуля рассматриваемого кольца, если сами они ненулевые, а их произведение равно нулевой матрице.

Задание 84.

Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ

Является ли множество M матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in R$ полем относительно матричного сложения и умножения? (Ответ запишите в виде: *является или не является*)

Правильный ответ: является, так как множество M замкнуто относительно операций матричного сложения и умножения и выполняются все аксиомы поля.