

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Комин Андрей Эдуардович

Должность: ректор

Дата подписания: 20.07.2026 08:46:58

Уникальный идентификатор:

f6c6d686f0c899fdf76a1ed8b448452ab8cac6fb1af6547b6d40cdf1bdc60ae2

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Приморский государственный аграрно-технологический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

методические указания для самостоятельной работы обучающихся
по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и физика»

Уссурийск 2024

Жуплей И.В. Математический анализ: методические указания для самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) / сост. И.В. Жуплей; ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ. – Уссурийск: ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ, 2024. – 47 с.

Методические указания составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины (модуля). Предназначены для обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Рецензент: Савельева Е.В., кандидат технических наук, доцент,
доцент

Инженерно-технологического института ФГБОУ ВО «Приморский
государственный аграрно-технологический университет»

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ

1 Содержание основных разделов дисциплины

Содержание учебного материала по дисциплине «Математический анализ» представлено в таблице:

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	<i>Введение в математический анализ. Пределы</i>	1.1 Понятие функции, четность-нечетность, область определения; основные элементарные функции, их свойства и графики. 1.2 Бесконечно-малые и бесконечно большие величины, их свойства. Предел последовательности и предел переменной. Свойства пределов. Предел функции, раскрытие неопределенностей. 1.3 Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Натуральные логарифмы. 1.4 Непрерывность функции, классификация точек разрыва, свойства непрерывных функций в точке и на отрезке.
2.	<i>Дифференциальное исчисление функций, зависящих от одной переменной</i>	2.1 Производная функции, ее экономический и геометрический смысл. Основные формулы и правила дифференцирования. 2.2 Производная сложной и неявной функции. Понятие о производных высших порядков. 2.3 Правило Лопиталя.
3.	<i>Применение производной</i>	3.1 Основные теоремы дифференциального исчисления. Возрастание, убывание, экстремум функции. 3.2 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты графика функции. 3.3. Полное исследование функций. 3.4 Дифференциал функции, его свойства, геометрический смысл, применение к приближенным вычислениям.

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
4.	<i>Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных</i>	4.1 Функции нескольких переменных. Частные производные, полный дифференциал. Приближенные вычисления с помощью приближенного дифференциала. 4.2 Экстремум функции двух переменных. Метод наименьших квадратов. Применение в экономике.
5.	<i>Неопределенный интеграл</i>	5.1 Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. 5.2 Интегрирование подстановкой и по частям в неопределенном интеграле, интегрирование рациональных дробей. 5.3 Интегрирование некоторых иррациональных выражений и выражений, содержащих тригонометрические функции.
6.	<i>Определенный интеграл</i>	6.1 Определение и основные свойства определенного интеграла. Его геометрический и экономический смысл. 6.2 Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям. 6.3 Вычисление площадей и объёмов с помощью определенного интеграла. Несобственные интегралы.
7.	<i>Дифференциал ные уравнения</i>	7.1 Понятие о дифференциальном уравнении, его общее и частное решения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, линейные) 7.2 Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков. Решение дифференциальных уравнений методом понижения порядка. 7.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

2 Задания для самостоятельной работы и указания к их выполнению

Тема:1 Предел функций (задачи 1-20). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 1.2 - 1.3 первого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 1.

1-20. Найти указанные пределы.

1. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 16x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$ а) $x_0=1$ б) $x_0=5$ в) $x_0 \rightarrow \infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 6x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{2x}\right)^{4x+3}$

2. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 11x + 6}$ а) $x_0=1$ б) $x_0=-2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x \cos 5x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{2x+5}$

3. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 1}{6x^2 - 5x - 1}$ а) $x_0=2$ б) $x_0=1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 3x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{10x-1}$

4. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$ а) $x_0=2$ б) $x_0=-2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\sin^2 2x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{6x+4}$

5. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x - 5}$ а) $x_0=-2$ б) $x_0=-1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x \operatorname{tg} 2x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 4x)^{\frac{8}{x}+1}$

6. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ а) $x_0=-1$ б) $x_0=1$ в) $x_0=\infty$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cos 2x}{\sin 3x}$$

$$7. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 - x - 14}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}$$

$$8. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 + x - 6}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \operatorname{tg} x}{x^2}$$

$$9. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x - 7}{3x^2 + x - 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 2x}$$

$$10. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 4x + 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cos 7x}{\sin 2x}$$

$$11. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 7x + 10}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 4x}$$

$$12. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \operatorname{tg} x}{\sin^2 2x}$$

$$13. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + x - 6}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{tg} 3x}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{5x}\right)^{15x+2}$$

$$a) x_0 = 2 \quad 6) x_0 = -2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{4x}\right)^{2-4x}$$

$$a) x_0 = 1 \quad 6) x_0 = 2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3x)^{\frac{6}{x}+2}$$

$$a) x_0 = -2 \quad 6) x_0 = -1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{2x+3}$$

$$a) x_0 = -1 \quad 6) x_0 = 1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^{4x+3}$$

$$a) x_0 = 1 \quad 6) x_0 = 2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{4x}\right)^{16x+3}$$

$$a) x_0 = 2 \quad 6) x_0 = -2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3x)^{\frac{6}{x}+4}$$

$$a) x_0 = 1 \quad 6) x_0 = 2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{6x}\right)^{12x+3}$$

$$14. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x - 8}{2x^2 + 5x + 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 - 4}$$

$$15. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 3x - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos 8x}{\sin 10x}$$

$$16. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 2x - 16}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - 6)}{x^2 - 36}$$

$$17. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \times \operatorname{ctgx}$$

$$18. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 8x + 7}{3x^2 - x - 4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{\sin 3x}$$

$$19. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9x + 8}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + 3)}{x^2 - 9}$$

$$20. 1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 7x + 6}{5x^2 + 4x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2}$$

$$a) x_0 = -2 \quad 6) x_0 = -1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{7x}\right)^{14x-3}$$

$$a) x_0 = -1 \quad 6) x_0 = 1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 3x)^{\frac{1}{6x} + 1}$$

$$a) x_0 = 2 \quad 6) x_0 = -2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{9x}\right)^{9x-3}$$

$$a) x_0 = 1 \quad 6) x_0 = 2 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{8x}\right)^{8x+2}$$

$$a) x_0 = -2 \quad 6) x_0 = -1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 5x)^{\frac{4}{5x} + 3}$$

$$a) x_0 = 2 \quad 6) x_0 = 1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{5x}\right)^{10x-2}$$

$$a) x_0 = 1 \quad 6) x_0 = -1 \quad B) x_0 = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 7x)^{\frac{3}{7x} - 2}$$

Решение типового примера.

Задача 1. Найти указанные пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6}$, а) $x_0 = -1$, б) $x_0 = 3$, в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 4x}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x+1}$

Решение.

а) Подставим вместо переменной x её предельное значение (-1) :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(-1)^2 - 3(-1) - 9}{(-1)^2 - (-1) - 6} = \frac{5 - 9}{2 - 6} = 1$$

б) При подстановке предельного значения $x=3$ получается неопределенность вида « $\frac{0}{0}$ ».

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Для избавления от этого типа неопределенности в нашем случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$.

Для числителя имеем: $2x^2 - 3x - 9 = 0$,

найдем дискриминант: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 81$,

по формуле корней получим: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 9}{4} = \frac{3}{2}$,

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 9}{4} = 3.$$

Следовательно, $2x^2 - 3x - 9 = 2(x - 3)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Аналогично для знаменателя: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

Теперь условие задачи можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3 + 2} = \frac{9}{5}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$$

Здесь сталкиваемся с неопределенностью « $\frac{\infty}{\infty}$ », избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{\infty} - \frac{9}{\infty} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\infty} - \frac{6}{\infty} \right)} = \frac{2 - 0 - 0}{1 - 0 - 0} = 2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x} = \frac{0}{0}$$

В данном случае для освобождения от неопределенности будем использовать первый замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1; \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{tg \alpha}{\alpha} = 1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{tg 4x \cdot tg 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{tg 4x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{4x}{tg 4x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{5x+1}$$

Решение.

Здесь сталкиваемся с неопределенностью $[1^\infty]$, преобразуем ко второму замечательному пределу $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e$. Для этого положим $\frac{3}{x} = \frac{1}{\alpha}$, где $\alpha \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, тогда $x = 3\alpha$.

Выразив основание и показатель степени через α , получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x+1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{15\alpha+1} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha \right]^{15} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^1 = e^{15} \cdot 1 = e^{15}$$

Тема:2 Дифференцирование функции одной переменной (задачи 21-41).

Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 2.1, 2.2, 23 второго раздела дисциплины и разобрать решение задачи 2.

21-41. Найти производные заданных функций.

21. а) $y = 2x^3 - \frac{3}{x^5} + 4\sqrt{x} - 5$

б) $y = (x^3 + 4)\sin 3x$

в) $y = \frac{2e^{x^2}}{x^2 - 4}$

г) $y = (6x - \cos 10x)^5$

22. а) $y = 3x^4 - 5\sqrt{x^4} + \frac{3}{x} - 4$

б) $y = e^{6x}(2x^3 + 5)$

в) $y = \frac{\cos(3x + 4)}{x^4 - 3}$

г) $y = (x^3 + 4^{5x})^6$

23. а) $y = 4x^5 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2^x$

б) $y = (x^4 + 1)e^{\sin x}$

в) $y = \frac{\arctg 2x}{1 + 4x^2}$

г) $y = \ln \sqrt{2x^2 + 3}$

24. а) $y = 2x^4 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \operatorname{ctg} 9x$

б) $y = \cos 3x \times e^{3x}$

$$\text{в) } y = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$25. \text{ а) } y = 7x^3 - \frac{4}{x^3} + 6x\sqrt[3]{x} - 5$$

$$\text{в) } y = \frac{1+16x^2}{\arctg 4x}$$

$$26. \text{ а) } y = 5x^2 + 4\sqrt[4]{x^5} + \frac{3}{x} - 4$$

$$\text{в) } y = \frac{3 - \cos 5x}{3 + \sin 5x}$$

$$27. \text{ а) } y = \frac{1}{4}x^8 + 8\sqrt[3]{x^3} - 5^x + 4$$

$$\text{в) } y = \frac{x+1}{x + \cos 4x}$$

$$28. \text{ а) } y = \frac{1}{5}x^5 + 3x\sqrt[3]{x} - 4\ln - 7$$

$$\text{в) } y = \frac{\cos 5x + 1}{\cos 5x - 1}$$

$$29. \text{ а) } y = 3x^8 + 5\sqrt[3]{x^2} - 3x + 9$$

$$\text{в) } y = \frac{\tg 5x}{2^{3x}}$$

$$30. \text{ а) } y = 5x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3x - 4$$

$$\text{в) } y = \frac{\ln x}{2x + 1}$$

$$31. \text{ а) } y = \frac{1}{7}x^7 - 3x\sqrt{x} + 5^{2x} + 5$$

$$\text{г) } y = \arccos^2(x-1)$$

$$\text{б) } y = (3x^2 + 1) \times \ln x$$

$$\text{г) } y = (e^{2x} + \sin 3x)^4$$

$$\text{б) } y = x^3(e^x - e^{-x})$$

$$\text{г) } y = \ln \sqrt{2x^2 + 4x + 1}$$

$$\text{б) } y = e^{5x}(2x^3 + 5)$$

$$\text{г) } y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2}$$

$$\text{б) } y = (x^3 - 3) \times \tg 3x$$

$$\text{г) } y = \ln \ctg 2x$$

$$\text{б) } y = (-x^2 + x - 1) \times e^{x^2}$$

$$\text{г) } y = \arcsin^3 \sqrt{x}$$

$$\text{б) } y = (1 + 3x) \times \tg 3x$$

$$\text{г) } y = \arctg \frac{1}{x}$$

$$\text{б) } y = (x^3 - 3) \times \tg 3x$$

$$\text{в) } y = \frac{2x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\text{г) } y = \operatorname{tg}^3(x^2 + 1)$$

$$32. \text{ а) } y = 8x^3 + 5\sqrt{x^3} - 4e^{2x} + 4$$

$$\text{б) } y = (x^2 + 1) \times \operatorname{ctg} 3x$$

$$\text{в) } y = \frac{2x}{1 + 4x^2}$$

$$\text{г) } y = \ln \operatorname{ctg} 5x$$

$$33. \text{ а) } y = 4x^3 + \frac{3}{x^3\sqrt{x}} - 6^{2x} + 3$$

$$\text{б) } y = (\sin 3x + 1) \times \ln x$$

$$\text{в) } y = \frac{3^{\sqrt{x}}}{\cos 2x}$$

$$\text{г) } y = \arcsin^3 \sqrt{x}$$

$$34. \text{ а) } y = 5x^7 + 4x^3\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 1$$

$$\text{б) } y = x^2 \arcsin 3x$$

$$\text{в) } y = \frac{4x + 3}{x^4 + 1}$$

$$\text{г) } y = \ln(\operatorname{tg} 2x + 2)$$

$$35. \text{ а) } y = 3x^4 + \frac{4}{x^2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} + 5$$

$$\text{б) } y = (x^3 + 3)5^{x^2}$$

$$\text{в) } y = \frac{e^{6x} - 1}{\sin 6x}$$

$$\text{г) } y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x - 2}$$

$$36. \text{ а) } y = 4x^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 2\ln x + 3$$

$$\text{б) } y = (3x^2 + 1)\operatorname{ctg} 2x$$

$$\text{в) } y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$$

$$\text{г) } y = \sqrt{9x - \sin 9x}$$

$$37. \text{ а) } y = 3x^8 + \frac{9}{x^3\sqrt{x}} - 7^x - 4$$

$$\text{б) } y = (\sqrt{x^2 + 1})\operatorname{tg} 2x$$

$$\text{в)} y = \frac{1+6x}{x^6+1}$$

$$\text{г)} y = \ln(\operatorname{arctg} 5x)$$

$$38. \text{ а)} y = \frac{1}{6}x^{12} + 4\sqrt[8]{x^5} - 3^x + 4$$

$$\text{б)} y = (x^3 + 3)e^{-x+1}$$

$$\text{в)} y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\text{г)} y = \sqrt{1-9x^2} + \arcsin 3x$$

$$39. \text{ а)} y = 7x^2 - 3\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 1$$

$$\text{б)} y = x^3(3 + \cos 5x)$$

$$\text{в)} y = \frac{2x}{\sqrt{x-9x^2}}$$

$$\text{г)} y = 2^{\operatorname{tg} 3x^2}$$

$$40. \text{ а)} y = 2x^3 + \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + 3\ln x - 2$$

$$\text{б)} y = (3x^2 + 1) \times \operatorname{ctg} 2x$$

$$\text{в)} y = \frac{x^2}{\ln x + x}$$

$$\text{г)} y = \cos^3 \sqrt{x}$$

Для выполнения заданий 21-40 воспользуйтесь правилами и формулами дифференцирования (таблица 1).

Основные правила и формулы дифференцирования

I Основные правила

$$1. [c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$2. [u \pm v]' = u' \pm v';$$

$$3. [u \cdot v]' = u'v + uv';$$

$$4. \left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

5. если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x))$; если каждая из функций дифференцируема по своему аргументу, то

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

II Основные формулы дифференцирования.

Таблица 1

	Простые функции	Сложные функции
1	$(x)' = 1$	$(u)' = u'$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
5	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Решение типового примера.

Задача 2. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{4}{x} + 7^x$

в) $y = \ln^2(2x^4 - 5)$

б) $y = (\sqrt[3]{x} + 2) \cdot \sin x$

г) $y = \frac{e^{\cos x}}{\operatorname{tg} x}$

Решение.

а) $y = x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{4}{x} + 7^x$

Функция y представляет собой сумму четырех функций, для нахождения производной используем правила (1,2), производные от каждой из функций находим соответственно по формулам (2,4,5) для простых функций.

$$\begin{aligned} y' &= (x^4)' - (3\sqrt{x})' + \left(\frac{4}{x}\right)' + (7^x)' = 4x^3 - 3 \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + 7^x \cdot \ln 7 \\ &= 4x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 7^x \cdot \ln 7 = 4x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} + 7^x \cdot \ln 7. \end{aligned}$$

Замечание: При нахождении производных, чтобы представить функцию как степенную используют формулы элементарной математики:

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m} \text{ и } \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

б) $y = (\sqrt[3]{x} + 2) \cdot \sin x$.

Решение.

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения (3) и формулами производной степенной и тригонометрической функции (2, 8):

$$[u \cdot v]' = u'v + uv'; (x^n)' = nx^{n-1}; (\sin x)' = \cos x, \text{ а также } (const)' = 0.$$

Преобразуем $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, получим:

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{\frac{1}{3}} + 2 \right)' \cdot \sin x + \left(\sqrt[3]{x} + 2 \right) \cdot (\sin x)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sin x + \left(\sqrt[3]{x} + 2 \right) \cdot \cos x = \\ &= \frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \left(\sqrt[3]{x} + 2 \right) \cdot \cos x \\ y' &= \frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \left(\sqrt[3]{x} + 2 \right) \cdot \cos x. \end{aligned}$$

в) $y = \ln^2(2x^4 - 5)$

Решение.

Имеем сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Тогда $y' = y'_u \cdot u'_x$,

Воспользуемся производной сложных функций:

$$u^n = nu^{n-1} \cdot u'; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Производная заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \ln(2x^4 - 5) \cdot (\ln(2x^4 - 5))' = 2 \ln(2x^4 - 5) \cdot \frac{(2x^4 - 5)'}{2x^4 - 5} = 2 \ln(2x^4 - 5) \cdot \frac{8x^3}{2x^4 - 5} \\ y' &= \frac{16x^3 \cdot \ln(2x^4 - 5)}{2x^4 - 5}. \end{aligned}$$

г) $y = \frac{e^{\cos x}}{\operatorname{tg} x}$

Решение.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного функций и производной сложной функций:

$$\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$y' = \frac{e^{\cos x} (\cos x)' \cdot \operatorname{tg} x - e^{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2} = \frac{-e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x - e^{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2}$$

$$y' = \frac{-e^{\cos x} (\sin x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x})}{(\operatorname{tg} x)^2}.$$

Тема:3 Применение производной (задачи 41-60, 60 -81). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 третьего раздела дисциплины и разобрать решение задач 3 и 4.

41-60. Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики, для этого:

- 1) Найти область определения.
- 2) Определить, является ли данная функция четной, нечетной.
- 3) Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума.
- 4) Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
- 5) Найти асимптоты графика функции.
- 6) Построить график.
- 7) Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке $[\alpha; \beta]$

$$41. y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1 \quad \alpha = 0; \beta = 4$$

$$42. y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10 \quad \alpha = -2; \beta = 3$$

$$43. y = \frac{1}{2}(4 + 8x^2 - x^4) \quad \alpha = 0; \beta = 3$$

$$44. y = (x + 1)(x - 2)^2 \quad \alpha = 1; \beta = 4$$

$$45. y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \quad \alpha = -1; \beta = 2$$

$$46. y = x^3 + x^2 - x - 5 \quad \alpha = 0; \beta = 2$$

$$47. y = \frac{3}{4}x^4 - 6x^2 + 5 \quad \alpha = -1; \beta = 3$$

$$48. y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18 \quad \alpha = 0; \beta = 3$$

$$49. y = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+4) \quad \alpha = 1; \beta = 4$$

$$50. y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2 \quad \alpha = -2; \beta = 2$$

$$51. y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 \quad \alpha = -1; \beta = 2$$

$$52. y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{5}{3} \quad \alpha = -2; \beta = 3$$

$$53. y = (x-1)(x+2)^2 \quad \alpha = -1; \beta = 2$$

$$54. y = 3 + 2x^2 - \frac{x^4}{4} \quad \alpha = -1; \beta = 3$$

$$55. y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \quad \alpha = -2; \beta = 2$$

$$56. y = \frac{1}{12}(x-6)^2(x+3) \quad \alpha = -1; \beta = 3$$

$$57. y = x^4 - 18x^2 + 5 \quad \alpha = -1; \beta = 2$$

$$58. y = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + \frac{4}{3} \quad \alpha = 2; \beta = 5$$

$$59. y = \frac{1}{8}(x-4)^2(x+2) \quad \alpha = -1; \beta = 3$$

$$60. y = x^4 - 8x^2 + 9 \quad \alpha = -3; \beta = 0$$

Решение типового примера.

Задача 3. Исследовать функцию и построить график.

$$y = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21) \quad \alpha = -4; \beta = 1$$

1. Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x , то есть $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция непрерывна на всей числовой прямой, нет точек разрыва, следовательно, нет вертикальных асимптот.

3. При исследовании на четность, нечетность найдем $y(-x)$.

$$y(-x) = \frac{1}{5}(-2x^3 + 3x^2 + 36x - 21) \text{ или } y(-x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 + 36x - 21)$$

Получили, что: $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$

Следовательно, функция нечетная ни четная – функция общего положения.

Следует напомнить, что график четной функции $[y(-x) = y(x)]$ симметричен оси ОУ, график нечетной функции $[y(-x) = -y(x)]$ симметричен относительно начала координат.

4. Находим интервалы возрастания, убывания и экстремум функции, для этого:

а) найдем производную функции

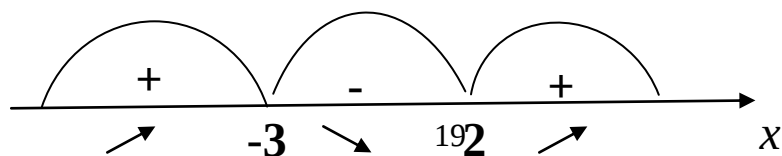
$$y' = \left[\frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21) \right]' = \frac{1}{5}[6x^2 + 6x - 36] = \frac{6}{5}(x^2 + x - 6)$$

б) Приравняем производную к нулю, решим уравнение $y' = 0$ и найдем критические точки I рода

$$\frac{6}{5}(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-1-5}{2} = -3 \\ x_2 &= \frac{-1+5}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= -3 \\ x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \text{-критические точки.}$$

в) Критическими точками разобьем область определения на интервалы и определим знак производной в каждом из интервалов.



Если, $x \in (-\infty; -3)$, например, $x = -4$, то $y'(-4) = \frac{6}{5}(16 - 4 - 6) = \frac{36}{5} > 0$.

Если, $x \in (-3; 2)$, например, $x = 0$, то $y'(0) = -\frac{36}{5} < 0$.

Если, $x \in (2; +\infty)$, например $x = 3$, то $y'(3) = \frac{6}{5}(9 + 3 - 6) = \frac{36}{5} > 0$.

Рассматривая знаки производной по интервалам, получаем, что при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, функция возрастает, отмечаем это стрелкой ↗, при $x \in (-3; 2)$ функция убывает ↘.

г) Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с (+) на (-), то в этой точке функция имеет максимум (max), если знак меняется с (-) на (+), то в точке функция имеет минимум (min).

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{5}[2 \cdot (-27) + 3 \cdot 9 + 108 - 21] = \frac{1}{5} \cdot 60 = 12$$

$$y_{\min} = y(2) = \frac{1}{5}[2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 72 - 21] = \frac{1}{5}(-65) = -13$$

В нашем случае $x = -3$ – абсцисса точки max, $x = 2$ – абсцисса точки min.

Вычисляем значение функции в точках экстремума:

Для построения графика укажем $A(-3; 12)$ – точка max, $B(2; -13)$ – точка min.

5. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

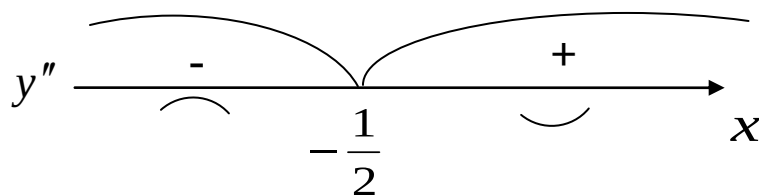
$$y'' = (y')' = \left[\frac{6}{5}(x^2 + x - 6) \right]' = \frac{6}{5}(2x + 1)$$

а) найдем производную второго порядка.

б) приравняем вторую производную к нулю, решим уравнение $y'' = 0$ и найдем критические точки II рода.

$$\frac{6}{5}(2x + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

в) область определения разобьем найденной точкой на интервалы и определим знак второй производной в каждом интервале



Расставляя знаки второй производной по интервалам, получаем, что в интервале

$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, график функции выпуклый,

в интервале $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ график функции вогнутый.

г) если при переходе через критическую точку II рода, меняет знак, то в этой точке имеем перегиб, в нашем случае $x = -\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба.

Вычислим ординату точки перегиба.

$$y_{\text{перегиб}} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 21 \right) = \frac{1}{2}$$

$C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ - точка перегиба.

6. Выясним наличие наклонных асимптот у графика данной функции.

Уравнение асимптоты ищем в виде $y = kx + b$,

$$\text{где } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

$$\text{Имеем } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left[2x^2 + 3x - 36 - \frac{21}{x} \right] = \infty$$

Следовательно, наклонных асимптот график не имеет.

7. Для построения графика функции составим сводную таблицу.

Разобьем числовую ось Ox характерными точками на интервалы (первая строка таблицы). Где характерными точками являются: точки экстремума; точки перегиба; точки, в которых функция не существует.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$\left(-3; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$	2	$(2; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y		$\max$ 12		пергиб $1/2$		$\min$ -13	

Строим график функции, отмечая точки A , B , C , $\max$, $\min$ и точку перегиба. Можно найти координаты дополнительных точек, например точку пересечения с осью OY , $x=0 \Rightarrow y = -\frac{21}{5} = -4,2 \Rightarrow D(0; -4,2)$. График на рисунке 1.

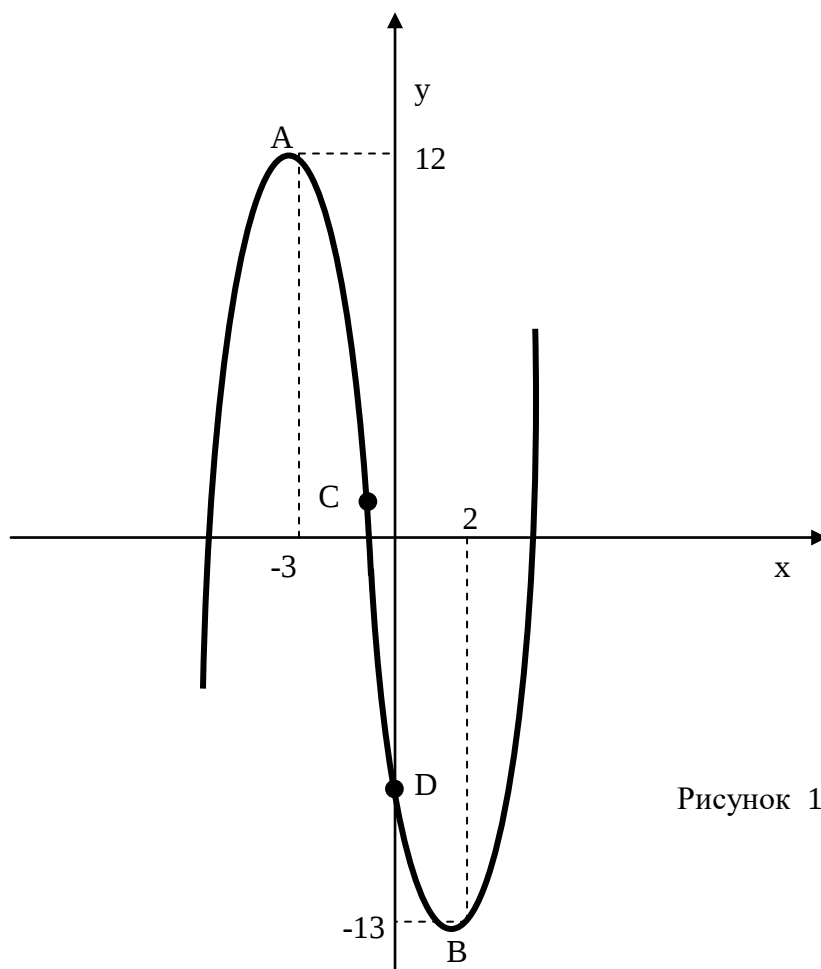


Рисунок 1.

8. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции на заданном отрезке $[-4; 1]$ по следующему правилу: вычислим значение функции в критических точках I рода, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка, затем выбираем наибольшее и наименьшее значение функции. Т. к. непрерывная на отрезке

функция имеет наибольшее и наименьшее значение либо в точках экстремума (внутри отрезка), либо на концах отрезка.

Критические точки $x_1 = -3 \in [-4; 1]$,
 $x_2 = 2 \notin [-4; 1]$

Вычисляем значение функции при $x=-4$; $x=-3$; $x=1$

$$y(-4) = \frac{1}{5}[2 \cdot (-64) + 48 + 144 - 21] = \frac{43}{5} = 8,6$$

$$y(-3) = 12; y(1) = \frac{1}{5}(2 + 3 - 36 - 21) = -\frac{52}{5} = -10,4$$

Следовательно, наименьшее значение функции на данном отрезке:

наименьшее значение функции $\min_{[-4; 1]} f(x) = -10,4;$

наибольшее значение функции $\max_{[-4; 1]} f(x) = 12$

61-80. Дана функция $y = f(x)$ и значения аргумента x_1 и x_2 . Требуется найти приближенное значение функции при $x=x_2$ исходя из ее точного значения при $x=x_1$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

61. $y = \sqrt{2x^2 + x^3 + 1}$
 $x_1=1; x_2=0,96$

71. $y = \sqrt{3x^2 + x - 5}$
 $x_1=3; x_2=2,97$

62. $y = \sqrt{5x^2 - 4x^3 - 8}$
 $x_1=3; x_2=2,93$

72. $y = \sqrt[3]{2x - 3}$
 $x_1=4; x_2=4,02$

63. $y = \sqrt[4]{3x^2 + 4}$
 $x_1=2; x_2=1,95$

73. $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$
 $x_1=8; x_2=7,98$

64. $y = \sqrt{x^3 + 2x^2}$
 $x_1=2; x_2=2,04$

74. $y = \sqrt[3]{2x^3 - 6x - 4}$
 $x_1=5; x_2=5,03$

$$65. y = \sqrt[3]{5x^3 + 3x^5}$$

$$x_1=1; x_2=1,08$$

$$75. y = \sqrt{6x^2 + 4}$$

$$x_1=4; x_2=3,96$$

$$66. y = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 5}$$

$$x_1=2; x_2=2,05$$

$$76. y = \sqrt[3]{4x^3 + 3x^2 - 10}$$

$$x_1=3; x_2=2,98$$

$$67. y = \sqrt[3]{x^5 - 5}$$

$$x_1=2; x_2=1,97$$

$$77. y = \sqrt{3x^2 - 8}$$

$$x_1=6; x_2=5,97$$

$$68. y = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 13}$$

$$x_1=3; x_2=3,04$$

$$78. y = \sqrt[3]{x^3 - x + 5}$$

$$x_1=5; x_2=4,97$$

$$69. y = \sqrt[5]{x^3 + 5}$$

$$x_1=3; x_2=3,08$$

$$79. y = \sqrt[4]{x^2 + 12}$$

$$x_1=2; x_2=2,05$$

$$70. y = \sqrt[4]{3x^5 - 2x + 15}$$

$$x_1=1; x_2=0,98$$

$$80. y = \sqrt[4]{8x^2 + 9}$$

$$x_1=3; x_2=3,06$$

Решение типового примера.

Задача 4. Вычислить приближенное значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 60}$ при $x_2=1,85$, исходя из её точного значения при $x_1=2$

Решение.

Известно, что если приращение аргумента Δx мало по абсолютной величине, то приращение функции Δy приближенно равно дифференциалу dy , т.е. $\Delta y \approx dy$, учитывая, что $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а $dy = f'(x)\Delta x$ и обозначая $x = x_1$ $x + \Delta x = x_2$ получим приближенную формулу:

$$f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1) \cdot \Delta x, \quad (3.1), \quad \text{где}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

В нашем случае: $f(x_1) = f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 60} = 4$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 + 60} \right)' = \left[(x^2 + 60)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^2 + 60)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + 60)' = \frac{1}{3} \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2 + 60)^2}};$$

$$f'(x_1) = f'(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{\sqrt[3]{4 + 60^2}} = \frac{1}{12}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.85 - 2 = -0.15$$

Подставляя найденные значения в формулу (3.2) получим:

$$f(1.85) \approx \sqrt[3]{1.85^2 + 60} \approx 4 + \frac{1}{12} \cdot (-0.15) = 4 - \frac{0.15}{12} = 4 - 0.0125 = 3.9875$$

$$\text{т.е. } \sqrt[3]{(1.85)^2 + 60} \approx 3.9875$$

Тема:4 Неопределенный интеграл (задачи 81-100). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 5.1, 5.2, 5.3 пятого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 5.

81-100. Найти неопределенные интегралы и результаты проверить дифференцированием.

81. а) $\int \left(3x^2 + \frac{8}{x} + 11 \cdot \sqrt[9]{x^2} \right) dx$

в) $\int x^3 \ln x dx$

б) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1}$

г) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 7x - 6}{x^2 + 4x + 3} dx$

82. а) $\int \left(4x^3 - 5 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1 \right) dx$

в) $\int x \cos 5x dx$

б) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4x^2 - 3}}$

г) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 30}{x^2 - 6x + 10} dx$

$$83. \text{ a) } \int (2x^3 - 5 \cdot \sqrt[3]{x} - 1) dx$$

$$\text{б) } \int \sqrt{5x^4 + 3} \cdot x^3 dx$$

$$84. \text{ a) } \int \left(5x^2 + \frac{8}{x^3} + 5 \right) dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x dx}{2x^2 + 5}$$

$$85. \text{ a) } \int \left(5x^4 + \frac{3}{x^4} + 2 \right) dx$$

$$\text{б) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{5x^4 + 3}}$$

$$86. \text{ a) } \int (2x^5 - 3 \cdot \sqrt{x} - 4) dx$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

$$87. \text{ a) } \int \left(x^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) dx$$

$$\text{б) } \int \frac{(\ln x + 3) dx}{x}$$

$$88. \text{ a) } \int (x^4 - 5 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 3) dx$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$$

$$89. \text{ a) } \int (2x^3 - 7 \cdot \sqrt[5]{x^2} - 4) dx$$

$$\text{б) } \int \frac{9^{tg x} dx}{\sin^2 x}$$

$$90. \text{ a) } \int \left(5x^3 - \frac{5}{x^6} + 11 \right) dx$$

$$\text{б) } \int (x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^3 - 9x^2 + 15x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$\text{б) } \int (2x-1) \sin 7x dx$$

$$\text{г) } \int \frac{3x^3 + 2x^2 + x - 12}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$\text{б) } \int (5x+1) \ln x dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3 - 7x^2 + 15x - 18}{x^2 - 2x + 3} dx$$

$$\text{б) } \int 3x^4 \ln x dx$$

$$\text{г) } \int \frac{5x^3 - 40x^2 + 99x - 3}{x^2 - 8x + 20} dx$$

$$\text{б) } \int (2x-7)e^{-8x} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{x^2 - 6x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{\ln x}{x^4} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 4x - 3}{x^2 - 2x} dx$$

$$\text{б) } \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3 - 11x^2 + 38x - 26}{x^2 - 10x + 26} dx$$

$$\text{б) } \int 2x \cdot 3^{2x} dx$$

$$6) \int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$$

$$91. a) \int (2x^4 - 3 \cdot \sqrt{x} + 5) dx$$

$$6) \int \frac{e^{2x} dx}{1 - 3e^{2x}}$$

$$92. a) \int (3x^5 - 7 \cdot \sqrt[4]{x} + 4) dx$$

$$6) \int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$$

$$93. a) \int (x^6 - 4 \cdot \sqrt[3]{x} + 2) dx$$

$$6) \int \frac{\arctg^5 x dx}{1 + x^2}$$

$$94. a) \int (x^7 - 5 \cdot \sqrt[4]{x} - 3) dx$$

$$6) \int \frac{e^{\arctg(x)} dx}{1 + x^2}$$

$$95. a) \int \left(3x^6 - \frac{5}{x^6} + 1 \right) dx$$

$$6) \int x^3 \cdot \sqrt[4]{1 + x^4} dx$$

$$96. a) \int (3x^6 + 8 \cdot \sqrt[5]{x^3} - 4) dx$$

$$6) \int \sin^4 x \cdot \cos x dx$$

$$97. a) \int (3x^4 - 11 \cdot \sqrt[6]{x^5} - 4) dx$$

$$6) \int \frac{dx}{x(2 + \ln x)}$$

$$98. a) \int \left(5x^6 - \frac{5}{x^7} - 5 \right) dx$$

$$r) \int \frac{3x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} dx$$

$$B) \int x \sin 3x dx$$

$$r) \int \frac{x^3 - 11x^2 + 14x + 27}{x^2 - 12x + 27} dx$$

$$B) \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$r) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$B) \int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$r) \int \frac{2x^3 - 8x^2 - 8x}{x^2 - 4x - 5} dx$$

$$B) \int 4x^5 \ln x dx$$

$$r) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 7x - 5}{x^2 + 4x - 5} dx$$

$$B) \int x \cos 2x dx$$

$$r) \int \frac{x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x - 5} dx$$

$$B) \int x e^{-3x} dx$$

$$r) \int \frac{x^3 + x^2 - 19x - 39}{x^2 + 6x + 8} dx$$

$$B) \int x \cdot \sin \frac{x}{5} dx$$

$$r) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 51}{x^2 + 8x + 17} dx$$

$$B) \int \frac{\ln x}{x^7} dx$$

$$б) \int \frac{2^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$$

$$г) \int \frac{x^3 + 9x^2 + 22x - 29}{x^2 + 10x + 29} dx$$

$$99. а) \int (7x^6 - 5x \cdot \sqrt{x} + 2) dx$$

$$в) \int x \cdot \cos 4x dx$$

$$б) \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 7}$$

$$г) \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 23x}{x^2 + 4x + 13} dx$$

$$100. а) \int (3x^3 + 7x \cdot \sqrt[3]{x} + 2) dx$$

$$в) \int \frac{\ln x}{x^5} dx$$

$$б) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + 3e^x}}$$

$$г) \int \frac{3x^3 + 7x^2 - 23x}{x^2 + 2x - 8} dx$$

При решении задач 81-100 используйте таблицу 2 - основных неопределенных интегралов.

Решение типового примера.

Задача 5. Найти неопределённые интегралы и результаты проверить дифференцированием:

$$а) \int (9x^8 + 3\sqrt{x} - 5x + 3) dx$$

$$б) \int x^2 (3 + 5x^3)^4 dx$$

$$в) \int (x + 3) \sin 2x dx$$

$$г) \int \frac{x^3 + 9x^2 + 2x - 120}{x^2 + 12x + 40} dx$$

Решение:

$$а) \int (9x^8 + 3\sqrt{x} - 5x + 3) dx$$

$$\int (9x^8 + 3\sqrt{x} - 5x + 3) dx =$$

$$\int 9x^8 dx + \int 3\sqrt{x} dx - \int 5x dx + \int 3 dx = 9 \int x^8 dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 5 \int x dx + 3 \int dx = 9 \frac{x^9}{9} + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5 \frac{x^2}{2} + 3x + C =$$

$$= x^9 + 2x\sqrt{x} - 2,5x^2 + 3x + C$$

$$1. \int dx = x + c;$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1;$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c;$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c;$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$6. \int e^x dx = e^x + c;$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + c;$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + c;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$$

$$12. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$13. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c;$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c;$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + t}} = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + t}) + c;$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c;$$

$$18. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c;$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + c;$$

$$20. \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c;$$

$$21. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c;$$

$$22. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c;$$

$$23. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

При решении использовали свойства неопределённого интеграла:

1) неопределённый интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме интегралов от каждой из функций, 2) постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла. Интегралы от каждого из слагаемых найдены с помощью формул 1 и 2 (см. таблицу интегралов).

Проверка:

Найдём производную от результата интегрирования, получим подынтегральную функцию.

$$\begin{aligned}(x^9 + 2x\sqrt{x} - 2,5x^2 + 3x + c)' &= 9x^8 + 2(x^{\frac{3}{2}})' - 2,5 \cdot 2x + 3 = 9x^8 + 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 5x + 3 = \\ &= 9x^8 + 3\sqrt{x} - 5x + 3.\end{aligned}$$

$$\text{б) } \int x^2 (3 + 5x^3)^4 dx$$

Интеграл найден подстановкой, затем используем формулу 2 таблицы.

Решение запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\int x^2 (3 + 5x^3)^4 dx &= \left| \begin{array}{l} u = 3 + 5x^3 \\ du = 15x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{du}{15} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{15} \int u^4 du = \frac{1}{15} \cdot \frac{u^5}{5} + c = \frac{u^5}{75} + c = \frac{(3 + 5x^3)^5}{75} + c\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}\left[\frac{(3 + 5x^3)^5}{75} \right]' &= \frac{1}{75} \cdot 5(3 + 5x^3)^4 \cdot (3 + 5x^3)' \\ &= \frac{1}{15} (3 + 5x^3)^4 \cdot 15x^2 = x^2 (3 + 5x^3)^4\end{aligned}$$

$$в) \int (x+3) \sin 2x dx$$

При вычислении этого интеграла применяется формула интегрирования по частям, которая имеет вид: $\int u dv = uv - \int v du$

Этой формулой пользуются в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы является более простым, чем исходный.

При этом следует учесть:

1) если подынтегральное выражение есть произведение показательной или тригонометрической на степенную функцию или многочлен, то за множитель **u** принимается многочлен;

2) если подынтегральное выражение есть произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на степенную функцию или многочлен, то за множитель **u** принимают логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

В нашем случае следуем первому указанию, решение оформим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int (x+3) \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x+3 & du = dx \\ dv = \sin 2x dx & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= (x+3) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} (x+3) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} (x+3) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

Проверка.

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{2} (x+3) \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \right]' &= -\frac{1}{2} [(x+3)' \cos 2x + (x+3) \cdot (\cos 2x)'] + \frac{1}{4} (\sin 2x)' = \\ &= -\frac{1}{2} [\cos 2x + (x+3) \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)'] + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot (2x)' = \\ &= -\frac{1}{2} [\cos 2x - 2(x+3) \sin 2x] + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot 2 = -\frac{1}{2} \cos 2x + (x+3) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = (x+3) \sin 2x \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{x^3 + 9x^2 + 2x - 120}{x^2 + 12x + 40} dx$$

Подынтегральное выражение есть неправильная дробь, поэтому прежде чем найти интеграл нужно эту дробь преобразовать, выделив целую часть дроби, т. е. представить дробь в виде суммы её целой части и правильной дроби. Для этого числитель дроби делим на знаменатель по правилу деления многочленов.

$$x^3 + 9x^2 + 2x - 120 \quad \left| \frac{x^2 + 12x + 40}{x - 3} \right.$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 12x^2 + 40x \\ - 3x^2 - 38x - 120 \\ \hline - 3x^2 - 36x - 120 \\ - 2x \end{array}$$

Целая часть – частное $(x - 3)$, остаток $(- 2x)$, следовательно:

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 2x - 120}{x^2 + 12x + 40} = (x - 3) - \frac{2x}{x^2 + 12x + 40}$$

Найдем отдельно интегралы от каждого слагаемого:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{2x}{x^2 + 12x + 40} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{преобразуем квадратный трехчлен,} \\ \text{выделив полный квадрат} \\ x^2 + 12x + 40 = (x^2 + 12x + 36) + 4 = (x + 6)^2 + 4 \end{array} \right| = \\ \int \frac{2x}{(x + 6)^2 + 4} dx &= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим:} \\ t = x + 6 \quad dx = dt \\ x = t - 6 \end{array} \right| = \int \frac{2(t - 6)}{t^2 + 4} dt = \int \frac{2t}{t^2 + 4} dt - 12 \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \\ \ln(t^2 + 4) - \frac{12}{2} \arctg \frac{t}{2} + c &= \ln[(x + 6)^2 + 4] - 6 \arctg \frac{x + 6}{2} + c \\ 2. \int (x - 3) dx &= \int x dx - 3 \int dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c \end{aligned}$$

При нахождении интеграла 1 использовали правило: если в числителе производная знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

При нахождении интеграла 2 использовали формулу (15) из таблицы интегралов

$$\text{Ответ: } \int \frac{x^3 + 9x^2 + 2x - 120}{x^2 + 12x + 40} dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \ln[(x+6)^2 + 4] + 6 \operatorname{arctg} \frac{x+6}{2} + c$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{2} - 3x - \ln(x^2 + 12x + 40) + 3 \operatorname{arctg} \frac{x+6}{2} + c \right)' &= x - 3 - \frac{1 \cdot (x^2 + 12x + 40)'}{x^2 + 12x + 40} + \frac{6}{1 + \left(\frac{x+6}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{x+6}{2} \right)' \\ &= x - 3 - \frac{2x + 12}{x^2 + 12x + 40} + \frac{6}{1 + \frac{(x+6)^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = x - 3 - \frac{2x + 12}{x^2 + 12x + 40} + \frac{6}{\frac{4 + (x+6)^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= x - 3 - \frac{2x + 12}{x^2 + 12x + 40} + \frac{24}{x^2 + 12x + 40} \cdot \frac{1}{2} = x - 3 - \frac{2x + 12}{x^2 + 12x + 40} + \frac{12}{x^2 + 12x + 40} = \\ &= x - 3 - \frac{2x}{x^2 + 12x + 40} = \frac{x^3 + 12x^2 + 40x - 3x^2 - 36x - 120 - 2x}{x^2 + 12x + 40} = \frac{x^3 + 9x^2 + 2x - 120}{x^2 + 12x + 40} \end{aligned}$$

Тема:5 Определенный интеграл (задачи 101-120). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 6.1, 6.2 шестого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 6.

101-120. Вычислить определенные интегралы.

$$101. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+4} dx$$

$$111. \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+9}$$

$$102. \int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+9} dx$$

$$112. \int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}$$

$$103. \int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+16} dx$$

$$113. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+16}$$

$$104. \int_1^{20} \frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{x+7}+4} dx$$

$$114. \int_1^{20} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}+4}$$

$$105. \int_8^{15} \frac{\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt[3]{x-7}+1} dx$$

$$115. \int_8^{15} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-7}+9}$$

$$106. \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+4}+3)}$$

$$116. \int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}+5}$$

$$107. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+1)}$$

$$117. \int_4^{11} \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt{x+5}} dx$$

$$108. \int_1^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1} dx$$

$$118. \int_0^2 \frac{\sqrt{4x+1}}{2+\sqrt{4x+1}} dx$$

$$109. \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$119. \int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{6+\sqrt{2x-1}} dx$$

$$110. \int_1^{13} \frac{dx}{\sqrt{4x-3}(\sqrt{4x-3}+5)}$$

$$120. \int_0^8 \frac{\sqrt[3]{x-8}}{\sqrt[3]{x-8}-2} dx$$

Решение типового примера.

Задача 6. Найти определенный интеграл:

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2} dx$$

Решение.

Для вычисления определенного интеграла, если промежуток интегрирования конечен и подынтегральная функция на данном промежутке непрерывна, можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для вычисления данного интеграла воспользуемся методом подстановки в определенном интеграле. Введем новую переменную следующей подстановкой: $\sqrt{x+1} = t$, тогда $x+1 = t^2$ или $dx = 2t dt$.

Определим пределы интегрирования для переменной t . При $x=0$, получаем $t_n = 1$, при $x=3$ получаем $t_e = 2$.

Выразив подынтегральное выражение, через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2} dx = \int_1^2 \frac{t}{t+2} 2t dt = 2 \int_1^2 \frac{t^2}{t+2} dt.$$

В подынтегральной дроби выделим целую часть, поделив числитель на

$$\text{знаменатель: } \frac{t^2}{t^2+2t} \quad \left| \frac{t+2}{t-2} \right. \quad \text{Получим } \frac{t^2}{t+2} = t - 2 + \frac{4}{t+2}.$$

$$\begin{array}{r} \hline -2t \\ \hline -2t-4 \\ \hline 4 \end{array}$$

Тогда заданный интеграл примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2} dx &= 2 \int_1^2 t dt - 4 \int_1^2 dt + 8 \int_1^2 \frac{dt}{t+2} = t^2 \Big|_1^2 - 4t \Big|_1^2 + 8 \ln|t+2| \Big|_1^2 \\ &= (9 - 12 + 8 \ln 5) - (1 - 4 + 8 \ln 3) = 8 \ln \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Тема:6. Применение определенного интеграла. Несобственные интеграл (задачи 121-140, 141 - 160). Перед выполнением задач необходимо изучить вопрос 6.3 шестого раздела дисциплины и разобрать решение задач 7, 8.

121-140. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

121	$y = \frac{1}{3}(x-3)^2, y = x+3$	131	$y = \frac{1}{3}(x-1)^2, y = x+5$
122	$y = \frac{1}{3}(x-4)^2, y = x+2$	132	$y = \frac{1}{3}(x+5)^2, y = x+11$
123	$y = \frac{1}{3}(x-5)^2, y = x+1$	133	$y = \frac{1}{3}(x+4)^2, y = x+10$
124	$y = \frac{1}{3}(x+1)^2, y = x+7$	134	$y = x^2 - 3, y = 4x - 6.$
125	$y = \frac{1}{3}(x+2)^2, y = x+8$	135	$y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7.$
126	$y = \frac{1}{3}(x+3)^2, y = x+9$	136	$y = x^2 + 1, y = x + 3.$
127	$y = x^2 - 3, y = -x - 1.$	137	$y = x^2 + 1, y = 4x - 2.$
128	$y = \frac{1}{3}(x-1)^2, y = x+5$	138	$y = x^2 + 2, y = -x + 4$
129	$y = x^2 + 4, y = 4x + 1.$	139	$y = x^2 - 2, y = 3x + 2.$
130	$y = 3x^2 + 2, y = 3x + 8.$	140	$y = \frac{1}{3}(x-4)^2, y = x+2$

Решение типового примера.

Задача 7. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{3}x^2; \quad y = -x + 6$$

Решение.

Фигура ограничена двумя линиями, найдём точки пересечения этих линий и сделаем чертёж, который указан на рисунке 8.

Решим систему:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x^2 + 3x - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x_1 = \frac{-3-9}{2} = -6 \\ x_2 = \frac{-3+9}{2} = 3 \end{cases}$$

Точки пересечения линий:

$A(-6; 12); B(3; 3)$

Для построения фигуры определим тип линий.

$y = \frac{1}{3}x^2$ - парабола, ветви

вверх, вершина $O(0;0)$,

$y = -x + 6$ - прямая линия.

Построение (рис.2)

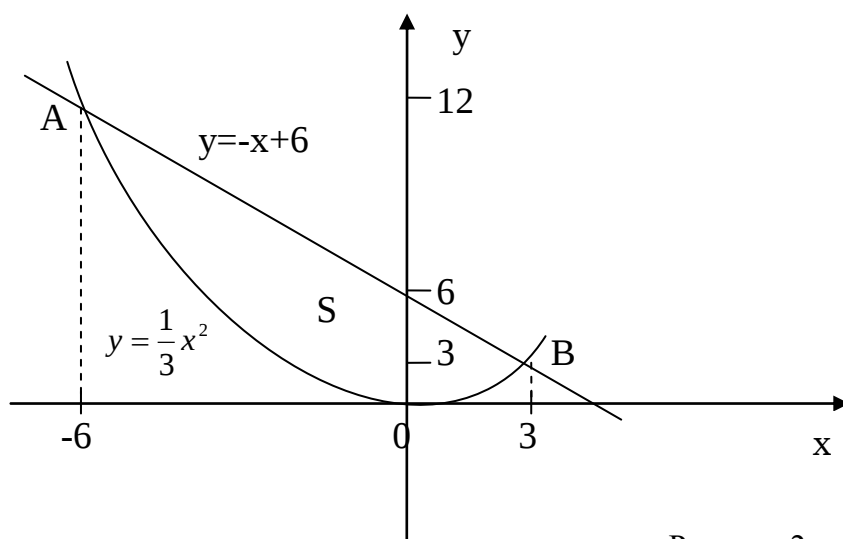


Рисунок 2

Вычисление площади осуществляем по формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx,$$

где $y = f_1(x)$ - кривая ограничивающая фигуру снизу,

$y = f_2(x)$ - кривая ограничивающая фигуру сверху.

В нашем случае $f_1(x) = \frac{1}{3}x^2$; $f_2(x) = -x + 6$

$$S = \int_{-6}^3 \left[(-x + 6) - \frac{1}{3}x^2 \right] dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{-6}^3 =$$

$$= \left(-\frac{9}{2} + 18 - \frac{3^3}{3^2} \right) - \left(-\frac{36}{2} - 36 - \frac{(-6)^3}{9} \right) =$$

$$(-4,5 + 18 - 3) - (-18 - 36 + 24) = 11,5 + 30 = 41,5$$

$$S = 41,5 \text{ (кв.ед.)}$$

141-160. Вычислить несобственные интегралы.

141	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$	151	$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}$
142	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+7)^2}$	152	$\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$
143	$\int_{-\infty}^0 e^{-3x+1} dx$	153	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$
144	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x-8}}$	154	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4x+2}$
145	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{3x+1}$	155	$\int_{-\infty}^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$
146	$\int_{-\infty}^0 \frac{2xdx}{x^2-1}$	156	$\int_{-\infty}^0 e^{-5x+1} dx$
147	$\int_0^{\infty} e^{x/2} dx$	157	$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{2x+4}$
148	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(3x-1)^4}$	158	$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2-1}$
149	$\int_1^{\infty} e^{-4x+1} dx$	159	$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$
150	$\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$	160	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+3)^4}$

Решение типового примера.

Задача 8. Вычислить несобственные интегралы.

а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

б) $\int_0^{\infty} e^{-5x} dx$

Решение.

Несобственные интегралы разделяют на два типа. Данный интеграл является интегралом первого типа с бесконечным пределом интегрирования.

За значение интеграла принимается предел, к которому стремиться соответствующий определенный интеграл при стремлении пределов интегрирования к бесконечности:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$$

Если указанные пределы конечны, то говорят, что несобственные интеграл сходится. Если же предел бесконечен (не существует), то говорят, что несобственный интеграл расходится. В заданном интеграле

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} \text{ применяем подстановку в определенном интеграле.}$$

Пусть $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$, если $x=3$, то $t=\ln 3$; $x \rightarrow \infty$, то $t \rightarrow \infty$, получим:

$$\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 3}^b \frac{dt}{t^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln 3}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{1}{\ln 3}, \quad \text{т.к. при } b \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} \rightarrow 0.$$

Интеграл сходится.

$$б) \int_0^{\infty} e^{-5x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-5x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-5x} \Big|_0^b = -\frac{1}{5} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-5b} - e^0) = \\ &= -\frac{1}{5} (e^{-\infty} - 1) = -\frac{1}{5} (0 - 1) = \frac{1}{5} - \text{несобственный интеграл сходится} \end{aligned}$$

$$\text{Замечание: } e^{-\infty} \rightarrow 0, \text{ т.к. } e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \rightarrow 0.$$

Тема:7. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. (задачи 161-180). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 4.1, 4.2 четвертого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 9.

160– 181. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ найти точки экстремума.

161. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	171. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
162. $z = xy - y^2 - x^2 + 1$	172. $z = 4 - 5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y$
163. $z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	173. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y$
164. $z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$	174. $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 5$
165. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	175. $z = x^3 - 6xy + 2y^3 + 9$
166. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y$	176. $z = x^2 + xy + 4y^2 + x^3$
167. $z = x^3 - 3xy + y^3 + 10$	177. $z = -x^3 + 9xy - y^3 + 7$
168. $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3 + 1$	178. $z = -x^3 - y^2 + 81x + 4y - 5$
169. $z = x^3 - 2xy + 8y^3 + 2$	179. $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 6$
170. $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4$	180. $z = x^2 - xy - y^2 + 6x + 2$

Решение типового примера.

Задача 9. Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$, требуется исследовать данную функцию на экстремум;

Решение.

1) Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию на экстремум необходимо выполнить следующие действия:

а) Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять к нулю и решить систему уравнений, решением которой являются стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Следовательно, заданная функция имеет только одну стационарную точку $P(4, -2)$.

б) Найдем частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных x и y , следовательно, постоянны в любой точке. Поэтому для точки $P(4, -2)$ имеем $A = -2; B = -1; C = -2$.

в) составить и вычислить определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2) \cdot (-2) - (-1)^2 = 3$$

г) Если в исследуемой стационарной точке $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в этой точке имеет максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$; если $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме требует дополнительного исследования. Для данной функции $\Delta > 0$ и $A < 0$, следовательно, в точке $P(4, -2)$ имеем максимум.

д) Найдем значение функции:

$$z_{\max} = z(4; -2) = -(4^2) - 4 \cdot (-2) - (-2)^2 + 6 \cdot 4 - 4 = 8.$$

Тема:8. Дифференциальные уравнения (задачи 181-200). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 7.1, 7.2, 7.3 седьмого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 10.

181-200. Даны дифференциальные уравнения.

Найти: а) общее и частное решение дифференциального уравнения первого порядка; б) общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

181. а) $y' - \frac{2y}{x} = x^2$ $y(1) = 0$	б) $y'' - 3y' + 2y = x$
182. а) $xy' + y = 2x + 1$ $y(1) = 2$	б) $y'' + 4y = x + 2$
183. а) $xy' - 2y = x + 1$ $y(1) = 1/2$	б) $y'' + y = e^x$
184. а) $y' + y = e^{-x}$ $y(0) = 2$	б) $y'' - y = x - 1$
185. а) $y' - 5x^4 y = e^{x^5}$ $y(0) = 1$	б) $y'' - 2y' + y = 2x$
186. а) $y' + y \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$ $y(1) = 1$	б) $y'' + 2y' + y = 4x$
187. а) $xy' - y = x\sqrt{x}$ $y(1) = 4$	б) $y'' - 4y' + 4y = 5x$
188. а) $2x \cdot y' + y = 2x^3$ $y(1) = 1/7$	б) $y'' + 2y' = 2e^x$
189. а) $x y' + 1 - y^2 = 0$ $y(1) = 2$	б) $y'' + 9y = x - 2$
190. а) $y' - \frac{3y}{x} = 2x^4$ $y(1) = 3$	б) $y'' + y' - 6y = 5e^x$
191. а) $xy' + 2y \ln x = \cos x$ $y(0) = 3$	б) $y'' - 6y = x + 1$
192. а) $xy' - 2y = x + 1$ $y(1) = 1$	б) $y'' + 25y = 3e^x$
193. а) $xy^2 \cdot y' = 1 - x^2$ $y(1) = 0$	б) $y'' - 7y' = 2e^x$
194. а) $y' + y = e^{2x}$ $y(0) = 0$	б) $y'' - 5y' = 3e^x$
195. а) $xy' + 2y = x^4$ $y(1) = 0$	б) $y'' - 5y' + 6y = 2x$
196. а) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ $y(1) = 2$	б) $y'' + 4y' + 3y = 3x + 1$
197. а) $xy' + y = \sin x$ $y(0) = 3$	б) $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$
198. а) $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ $y(0) = 1$	б) $y'' + 9y = 4x$
199. а) $y' + y \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ $y(0) = 1$	б) $y'' + 16y = 4 - x$
200. а) $xy' - 5y = e^x \cdot x^6$ $y(0) = 1$	б) $y'' - 4y' = 6e^x$

Решение типового примера.

Задача 10. Даны дифференциальные уравнения.

Найти:

а) общее и частное решение дифференциального уравнения первого

порядка $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x};$

б) общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

Решение

а) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, т.е. уравнением вида:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Для решений уравнений такого типа полагают $y = u \cdot v$, где u, v – независимые функции от x , $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение в нашем случае будем иметь:

$$u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{или} \quad (u' - u \operatorname{ctg} x) \cdot v + uv' = \frac{1}{\sin x}$$

Подберем функцию $u = u(x)$ так, чтобы выражение в скобке, обращалось в нуль. Для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} u' - u \operatorname{ctg} x = 0 \\ uv' = \frac{1}{\sin x} \quad (*) \end{cases}$$

Из первого уравнения системы определяем функцию $u(x)$, имеем дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$$u' - u \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u \cdot \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{du}{u} = \operatorname{ctg} x \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow$$

$$\ln u = \ln \sin x \Rightarrow u = \sin x$$

Для определения функции $v(x)$, найденное значение функции $u(x)$ подставляем во второе уравнение системы (*)

$$\sin x \cdot v' = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\operatorname{ctg} x + c$$

Записываем общее решение данного уравнения в виде $y = u \cdot v$ или

$$y = \sin x(-ctgx + c); \quad y = \sin x \left(-\frac{\cos x}{\sin x} + c \right);$$

$y = -\cos x + c \sin x$ - общее решение.

б) $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$

Решение.

Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$y'' + py' + q = f(x), \text{ где } p, q - \text{ числа.}$$

Общее решение этого уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения ($y'' + py' + q = 0$) и частного решения неоднородного уравнения т.е. $y = Y + \bar{y}$

Чтобы найти общее решение однородного уравнения Y , составляют характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, по корням этого уравнения записывают вид общего решения Y

В нашем примере: $y'' - y' - 6y = 0$ - соответствующее однородное уравнение, где $k^2 - k - 6y = 0$ - характеристическое уравнение, найдем его корни: $D = 25 \Rightarrow k_1 = -2; k_2 = 3$, общее решение определяем

по таблице 3- вид общего решения однородного дифференциального уравнения II порядка. Корни действительные различные, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $Y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$.

Таблица 3

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Общее решения
1. $D > 0$ $k_1 \neq k_2$ - действительные различные	$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $D = 0$ $k_1 = k_2$ - действительные равные	$Y = C_1 e^{k_2 x} + C_2 x e^{k_2 x} = e^{k_2 x} (C_1 + C_2 x)$
3. $D < 0$ $\begin{cases} k_1 = \alpha + \beta \cdot i \\ k_2 = \alpha - \beta \cdot i \end{cases}$ - комплексные сопряженные.	$Y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Частное решение неоднородного уравнения находим по виду правой части уравнения, при этом: если $f(x) = P_n(x)e^{2x}$, где $P_n(x)$ — многочлен n -ой степени с неопределенными коэффициентами, то частное решение будет иметь вид:

1. $\bar{y} = Q_n(x)e^{2x}$, где $Q_n(x)$ — многочлен n -ой степени с неопределенными коэффициентами

2. $\bar{y} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{2x}$, если α совпадает с одним из корней характеристического уравнения ($\alpha = k_1$ или $\alpha = k_2$)

3. $\bar{y} = x^2 \cdot Q_n(x)e^{2x}$ если $\alpha = k_1 = k_2$

Если $f(x) = P_n(x)$, то $\alpha = 0$

В нашем примере:

$f(x) = 10e^{3x}$, $\alpha = 3 = k_2$ имеем второй случай, множитель перед e^{3x} — многочлен нулевой степени, частное решение записываем в виде: $\bar{y} = xAe^{3x}$, где A — неопределенный коэффициент, чтобы найти значение A решение $\bar{y}$ подставляем в данное уравнение, для этого найдем $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$

$$\bar{y}' = (xA \cdot e^{3x})' = A(e^{3x} + 3xe^{3x}) = Ae^{3x} + A \cdot 3 \cdot x \cdot e^{3x}$$

$$\bar{y}'' = 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

Подставляем в данное уравнение значение $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$

$$6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - Ae^{3x} - 6Axe^{3x} = 10e^{3x}$$

$$5Ae^{3x} = 10e^{3x} \Rightarrow 5A = 10 \Rightarrow A = 2$$

$\bar{y} = 2xe^{3x}$ — частное решение линейного неоднородного уравнения.

$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + 2x \cdot e^{3x}$ — общее решение данного уравнения.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Содержание основных разделов дисциплины	3
2	Задания для самостоятельной работы и указания к их выполнению	5

Жуплей Ирина Викторовна

Математический анализ: методические указания для самостоятельной
работы обучающихся по направлению подготовки 44.03.05
Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Подписано в печать _____ 2024. Формат 60х90 1/6. Бумага писчая.
Печать офсетная. Уч.-изд. л _____. Тираж ____ экз. Заказ ____