Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Приморский государственный аграрно-технологический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

методические указания для самостоятельной работы обучающихся
по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и физика»

Уссурийск 2024

Жуплей И.В. Математический анализ: методические указания для самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и физика» / сост. И.В. Жуплей; ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ. – Уссурийск: ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ, 2024. – 47 с.

Методические указания составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины (модуля). Предназначены для обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и физика»

Рецензент: Савельева Е.В., кандидат технических наук, доцент, доцент Инженерно-технологического института ФГБОУ ВО «Приморский государственный аграрно-технологический университет»

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО Приморский ГАТУ

1 Содержание основных разделов дисциплины

Содержание учебного материала по дисциплине «Математический анализ» представлено в таблице:

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	***Введение в математический анализ. Пределы***	1.1 Понятие функции, четность-нечетность, область определения; основные элементарные функции, их свойства и графики. 1.2 Бесконечно-малые и бесконечно большие величины, их свойства. Предел последовательности и предел переменной. Свойства пределов. Предел функции, раскрытие неопределенностей. 1.3 Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Натуральные логарифмы. 1.4 Непрерывность функции, классификация точек разрыва, свойства непрерывных функций в точке и на отрезке.
2.	***Дифференциальное исчисление функций, зависящих от одной переменной***	2.1 Производная функции, ее экономический и геометрический смысл. Основные формулы и правила дифференцирования. 2.2 Производная сложной и неявной функции. Понятие о производных высших порядков. 2.3 Правило Лопиталя.
3.	***Применение производной***	3.1 Основные теоремы дифференциального исчисления. Возрастание, убывание, экстремум функции. 3.2 Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты графика функции. 3.3. Полное исследование функций. 3.4 Дифференциал функции, его свойства, геометрический смысл, применение к приближенным вычислениям.

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
4.	***Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных***	4.1 Функции нескольких переменных. Частные производные, полный дифференциал. Приближенные вычисления с помощью приближенного дифференциала. 4.2 Экстремум функции двух переменных. Метод наименьших квадратов. Применение в экономике.
5.	***Неопределенный интеграл***	5.1 Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. 5.2 Интегрирование подстановкой и по частям в неопределенном интеграле, интегрирование рациональных дробей. 5.3 Интегрирование некоторых иррациональных выражений и выражений, содержащих тригонометрические функции.
6.	***Определенный интеграл***	6.1 Определение и основные свойства определенного интеграла. Его геометрический и экономический смысл. 6.2 Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям. 6.3 Вычисление площадей и объёмов с помощью определенного интеграла. Несобственные интегралы.
7.	***Дифференциальные уравнения***	7.1 Понятие о дифференциальном уравнении, его общее и частное решения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, линейные) 7.2 Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков. Решение дифференциальных уравнений методом понижения порядка. 7.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

2 Задания для самостоятельной работы и указания к их выполнению

<u>Тема:1</u> Предел функций (задачи 1-20). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 1.2 - 1.3 первого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 1.

1-20. Найти указанные пределы.

1. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 - 16x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$ а) $x_0=1$ б) $x_0=5$ в) $x_0 \to \infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 2x}{\sin 6x}$ 3) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{5}{2x})^{4x+3}$

2. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 11x + 6}$ а) $x_0=1$ б) $x_0=-2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x \cos 5x}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{2x}\right)^{2x+5}$

3. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - x - 1}{6x^2 - 5x - 1}$ а) $x_0=2$ б) $x_0=1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 9x}{tg 3x}$ 3) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{5x})^{10x-1}$

4. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - x - 10}{x^2 + 3x + 2}$ а) $x_0=2$ б) $x_0= -2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x tg 3x}{\sin^2 2x}$ 3) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{4}{3x})^{6x+4}$

5. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - 3x - 5}$ а) $x_0= -2$ б) $x_0= -1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x tg 2x}$ 3) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 4x)^{\frac{8}{x}+1}$

6. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ а) $x_0= -1$ б) $x_0=1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cos 2x}{\sin 3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{5x})^{15x+2}$

7\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$ а) x_0= 2 б) x_0= -2 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xtg4x}{\sin 6x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{4x})^{2-4x}$

8\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2x^2-7x+6}{x^2+x-6}$ а) x_0= 1б) x_0= 2 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2xtgx}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3x)^{\frac{6}{x}+2}$

9\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$ а) x_0= -2 б) x_0= -1 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg8x}{\sin 2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{5}{x})^{2x+3}$

10\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+x-4}{x^2-4x+3}$ а) x_0= -1 б) x_0= 1 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x\cos 7x}{\sin 2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{2x})^{4x+3}$

11\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-x-10}{x^2-7x+10}$ а) x_0= 1 б) x_0= 2 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{tg4x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{5}{4x})^{16x+3}$

12\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$ а) x_0= 2 б) x_0= -2 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5xtgx}{\sin^2 2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3x)^{\frac{6}{x}+4}$

13\. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2-7x+2}{x^2+x-6}$ а) x_0= 1 б) x_0= 2 в) x_0=∞

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin xtg3x}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{6x})^{12x+3}$

14. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-7x-8}{2x^2+5x+3}$ а) $x_0= -2$ б) $x_0= -1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{7x})^{14x-3}$

15. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-3x-1}{x^2-5x+4}$ а) $x_0= -1$ б) $x_0= 1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cos 8x}{\sin 10x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-3x)^{\frac{1}{6x}+1}$

16. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-2x-16}$ а) $x_0= 2$ б) $x_0= -2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-6)}{x^2-36}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{9x})^{9x-3}$

17. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-5x+6}$ а) $x_0= 1$ б) $x_0= 2$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\times ctgx$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{8x})^{8x+2}$

18. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+8x+7}{3x^2-x-4}$ а) $x_0= -2$ б) $x_0= -1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg9x}{\sin 3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-5x)^{\frac{4}{5x}+3}$

19. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9x+8}$ а) $x_0= 2$ б) $x_0= 1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+3)}{x^2-9}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{6}{5x})^{10x-2}$

20. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+7x+6}{5x^2+4x-1}$ а) $x_0= 1$ б) $x_0= -1$ в) $x_0=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{3}{7x}-2}$

Решение типового примера.

Задача 1. Найти указанные пределы:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6}$, а) $x_0 = -1$, б) $x_0 = 3$, в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x}$ 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{5x+1}$

Решение.

а) Подставим вместо переменной *x* её предельное значение (-1):

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to -1} \frac{2(-1)^2 - 3(-1) - 9}{(-1)^2 - (-1) - 6} = \frac{5 - 9}{2 - 6} = 1$$

б) При подстановке предельного значения *x=3* получается неопределенность вида «$\frac{0}{0}$».

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Для избавления от этого типа неопределенности в нашем случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2- корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$.

Для числителя имеем: $2x^2 - 3x - 9 = 0$,

найдем дискриминант : $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 81$,

по формуле корней получим: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-(-3) - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 - 9}{4} = \dfrac{3}{2}$,

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 9}{4} = 3.$$

Следовательно , $2x^2 - 3x - 9 = 2(x - 3)\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$.

Аналогично для знаменателя: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$.

Теперь условие задачи можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x+2} = \frac{2\cdot 3+3}{3+2} = \frac{9}{5}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Здесь сталкиваемся с неопределенностью «$\frac{\infty}{\infty}$», избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)} = = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{\infty}-\frac{9}{\infty}\right)}{\left(1-\frac{1}{\infty}-\frac{6}{\infty}\right)} = \frac{2-0-0}{1-0-0} = 2.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x}$**.**

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x} = \frac{0}{0}$$

В данном случае для освобождения от неопределенности будем использовать первый замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha} = 1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg\ 4x\cdot tg4x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{4x}{tg4x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{4x}{tg4x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x+1}$

Решение.

Здесь сталкиваемся с неопределенностью $\left[1^{\infty}\right]$, преобразуем ко второму замечательному пределу $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$. Для этого положим $\frac{3}{x}=\frac{1}{\alpha}$, где $\alpha\to\infty$ при $x\to\infty$, тогда $x=3\alpha$.

Выразив основание и показатель степени через α, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x+1}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{15\alpha+1}=\left[\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{15}\cdot\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{1}=$$

$$e^{15}\cdot 1=e^{15}$$

<u>Тема:2</u> Дифференцирование функции одной переменной (задачи 21-41). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 2.1, 2.2, 23 второго раздела дисциплины и разобрать решение задачи 2.

21-41. Найти производные заданных функций.

21. а) $y=2x^{3}-\dfrac{3}{x^{5}}+4\sqrt{x}-5$ б) $y=(x^{3}+4)\sin 3x$

в) $y=\dfrac{2e^{x^{2}}}{x^{2}-4}$ г) $y=(6x-\cos 10x)^{5}$

22. а) $y=3x^{4}-5\sqrt[5]{x^{4}}+\dfrac{3}{x}-4$ б) $y=e^{6x}(2x^{3}+5)$

в) $y=\dfrac{\cos(3x+4)}{x^{4}-3}$ г) $y=(x^{3}+4^{5x})^{6}$

23. а) $y=4x^{5}-3\sqrt[3]{x^{2}}+2^{x}$ б) $y=(x^{4}+1)e^{\sin x}$

в) $y=\dfrac{arctg\,2x}{1+4x^{2}}$ г) $y=\ln\sqrt{2x^{2}+3}$

24. а) $y=2x^{4}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+ctg 9x$ б) $y=\cos 3x\times e^{3x}$

в) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ г) $y=\arccos^2(x-1)$

25. а) $y=7x^3-\dfrac{4}{x^3}+6x\sqrt[3]{x}-5$ б) $y=(3x^2+1)\times\ln x$

в) $y=\dfrac{1+16x^2}{arctg\,4x}$ г) $y=(e^{2x}+\sin 3x)^4$

26. а) $y=5x^2+4\sqrt[4]{x^5}+\dfrac{3}{x}-4$ б) $y=x^3(e^x-e^{-x})$

в) $y=\dfrac{3-\cos 5x}{3+\sin 5x}$ г) $y=\ln\sqrt{2x^2+4x+1}$

27. а) $y=\dfrac{1}{4}x^8+8\sqrt[3]{x^3}-5^x+4$ б) $y=e^{5x}(2x^3+5)$

в) $y=\dfrac{x+1}{x+\cos 4x}$ г) $y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$

28. а) $y=\dfrac{1}{5}x^5+3x\sqrt[3]{x}-4\ln-7$ б) $y=(x^3-3)\times tg3x$

в) $y=\dfrac{\cos 5x+1}{\cos 5x-1}$ г) $y=\ln ctg2x$

29. а) $y=3x^8+5\sqrt[3]{x^2}-3x+9$ б) $y=(-x^2+x-1)\times e^{x^2}$

в) $y=\dfrac{tg5x}{2^{3x}}$ г) $y=\arcsin^3\sqrt{x}$

30. а) $y=5x^4-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+3x-4$ б) $y=(1+3x)\times tg3x$

в) $y=\dfrac{\ln x}{2x+1}$ г) $y=arctg\,\dfrac{1}{x}$

31. а) $y=\dfrac{1}{7}x^7-3x\sqrt{x}+5^{2x}+5$ б) $y=(x^3-3)\times tg3x$

в) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x}+1}$

г) $y=tg^3(x^2+1)$

32. а) $y=8x^3+5\sqrt[5]{x^3}-4e^{2x}+4$

б) $y=(x^2+1)\times ctg3x$

в) $y=\dfrac{2x}{1+4x^2}$

г) $y=\ln ctg5x$

33. а) $y=4x^3+\dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}-6^{2x}+3$

б) $y=(\sin 3x+1)\times\ln x$

в) $y=\dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\cos 2x}$

г) $y=\arcsin^3\sqrt{x}$

34. а) $y=5x^7+4x\sqrt[3]{x}-\dfrac{8}{x}+1$

б) $y=x^2\arcsin 3x$

в) $y=\dfrac{4x+3}{x^4+1}$

г) $y=\ln(tg2x+2)$

35. а) $y=3x^4+\dfrac{4}{x^2\sqrt{x}}-3\sqrt{x}+5$

б) $y=(x^3+3)5^{x^2}$

в) $y=\dfrac{e^{6x}-1}{\sin 6x}$

г) $y=arctg\dfrac{3}{x-2}$

36. а) $y=4x^3+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-2\ln x+3$

б) $y=(3x^2+1)ctg2x$

в) $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$

г) $y=\sqrt{9x-\sin 9x}$

37. а) $y=3x^8+\dfrac{9}{x^3\sqrt{x}}-7^x-4$

б) $y=\left(\sqrt{x^2+1}\right)tq2x$

в) $y = \dfrac{1+6x}{x^6+1}$ г) $y = \ln(arctg 5x)$

38. а) $y = \dfrac{1}{6}x^{12} + 4\sqrt[8]{x^5} - 3^x + 4$ б) $y = (x^3+3)e^{-x+1}$

в) $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ г) $y = \sqrt{1-9x^2} + \arcsin 3x$

39. а) $y = 7x^2 - 3\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{2}{x} - 1$ б) $y = x^3(3+\cos 5x)$

в) $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x} - 9x^2}$ г) $y = 2^{tg 3x^2}$

40. а) $y = 2x^3 + \dfrac{5}{\sqrt[5]{x}} + 3\ln x - 2$ б) $y = (3x^2+1)\times ctg 2x$

в) $y = \dfrac{x^2}{\ln x + x}$ г) $y = \cos^3 \sqrt{x}$

Для выполнения заданий 21-40 воспользуйтесь правилами и формулами дифференцирования (таблица 1).

Основные правила и формулы дифференцирования

I Основные правила

1. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

2. $[u \pm v]' = u' \pm v'$;

3. $[u \cdot v]' = u'v + uv'$;

4. $\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

5.если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x))$; если каждая из функций дифференцируема по своему аргументу, то

$$y' = y'_u \cdot u'_x .$$

II Основные формулы дифференцирования.

Таблица 1

	Простые функции	Сложные функции
1	$(x)'=1$	$(u)'=u'$
2	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
3	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
4	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$
5	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
6	$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
7	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
8	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
9	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
10	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
11	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)'=\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
12	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
13	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
14	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
15	$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Решение типового примера.

Задача 2. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^4 - 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} + 7^x$ в) $y = \ln^2\left(2x^4 - 5\right)$

б) $y = \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot \sin x$ г) $y = \dfrac{e^{\cos x}}{tgx}$

Решение.

а) $y = x^4 - 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} + 7^x$

Функция *y* представляет собой сумму четырех функций, для нахождения производной используем правила (1,2), производные от каждой из функций находим соответственно по формулам (2,4,5) для простых функций.

$$y' = \left(x^4\right)' - \left(3\sqrt[3]{x}\right)' + \left(\frac{4}{x}\right)' + \left(7^x\right)' = 4x^3 - 3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + 7^x \cdot \ln 7$$

$$= 4x^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 7^x \cdot \ln 7 = 4x^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^2} + 7^x \cdot \ln 7.$$

Замечание: При нахождении производных, чтобы представить функцию как степенную используют формулы элементарной математики:

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m} \quad и \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

б) $y = \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot \sin x$**.**

Решение.

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения (3) и формулами производной степенной и тригонометрической функции (2, 8):

$$\left[u \cdot v\right]' = u'v + uv'; \ \left(x^n\right)' = nx^{n-1}; \ \left(\sin x\right)' = \cos x, \text{ а также } \left(const\right)' = 0.$$

Преобразуем $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, получим:

$$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)'\cdot\sin x+\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\cdot(\sin x)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sin x+\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\cdot\cos x$$

$$y'=\frac{\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\cdot\cos x.$$

в) $y=\ln^2\left(2x^4-5\right)$

Решение.

Имеем сложную функцию $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Тогда $y'=y_u^{'}\cdot u_x^{'}$,

Воспользуемся производной сложных функций:

$$u^n=nu^{n-1}\cdot u';\qquad (\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

Производная заданной функции:

$$y'=2\ln\left(2x^4-5\right)\cdot\left(\ln\left(2x^4-5\right)\right)'=2\ln\left(2x^4-5\right)\cdot\frac{\left(2x^4-5\right)'}{2x^4-5}=2\ln\left(2x^4-5\right)\cdot\frac{8x^3}{2x^4-5}$$

$$y'=\frac{16x^3\cdot\ln\left(2x^4-5\right)}{2x^4-5}.$$

г) $y=\dfrac{e^{\cos x}}{tgx}$

Решение.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного функций и производной сложной функций:

$$\left[\frac{u}{v}\right]'=\frac{u'v-uv'}{v^2};\qquad \left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$$

$$y' = \frac{e^{\cos x}(\cos x)' \cdot tgx - e^{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(tgx)^2} = \frac{-e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot tgx - e^{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(tgx)^2}$$

$$y' = \frac{-e^{\cos x}(\sin x \cdot tgx + \frac{1}{\cos^2 x})}{(tgx)^2}.$$

<u>Тема:3</u> Применение производной (задачи 41-60, 60 -81). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 третьего раздела дисциплины и разобрать решение задач 3 и 4.

41-60. Исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики, для этого:

1) Найти область определения.

2) Определить, является ли данная функция четной, нечетной.

3) Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума.

4) Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

5) Найти асимптоты графика функции.

6) Построить график.

7) Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке $[\alpha;\beta]$

41. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ $\qquad \alpha = 0; \beta = 4$

42. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$ $\qquad \alpha = -2; \beta = 3$

43. $y = \frac{1}{2}(4 + 8x^2 - x^4)$ $\qquad \alpha = 0; \beta = 3$

44. $y = (x+1)(x-2)^2$ $\qquad \alpha = 1; \beta = 4$

45. $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$ $\qquad \alpha = -1; \beta = 2$

46. $y = x^3 + x^2 - x - 5$ $\qquad \alpha = 0; \beta = 2$

47. $y=\frac{3}{4}x^4-6x^2+5$ $\alpha=-1;\beta=3$

48. $y=x^3-9x^2+24x-18$ $\alpha=0;\beta=3$

49. $y=\frac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$ $\alpha=1;\beta=4$

50. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$ $\alpha=-2;\beta=2$

51. $y=2x^3-9x^2+12x-5$ $\alpha=-1;\beta=2$

52. $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+\frac{5}{3}$ $\alpha=-2;\beta=3$

53. $y=(x-1)(x+2)^2$ $\alpha=-1;\beta=2$

54. $y=3+2x^2-\frac{x^4}{4}$ $\alpha=-1;\beta=3$

55. $y=4x^3-3x^2-6x+2$ $\alpha=-2;\beta=2$

56. $y=\frac{1}{12}(x-6)^2(x+3)$ $\alpha=-1;\beta=3$

57. $y=x^4-18x^2+5$ $\alpha=-1;\beta=2$

58. $y=\frac{2}{3}x^3-5x^2+8x+\frac{4}{3}$ $\alpha=2;\beta=5$

59. $y=\frac{1}{8}(x-4)^2(x+2)$ $\alpha=-1;\beta=3$

60. $y=x^4-8x^2+9$ $\alpha=-3;\beta=0$

Решение типового примера.

Задача 3. Исследовать функцию и построить график.

$y=\frac{1}{5}\left(2x^3+3x^2-36x-21\right)$ $\alpha=-4;\beta=1$

1.Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента *x*, то есть *D(y):* $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Функция непрерывна на всей числовой прямой, нет точек разрыва, следовательно, нет вертикальных асимптот.

3.При исследовании на четность, нечетность найдем *y(-x).*

$$y(-x)=\frac{1}{5}\left(-2x^3+3x^2+36x-21\right) \text{ или } y(-x)=\frac{1}{5}\left(2x^3+3x^2+36x-21\right)$$

Получили, что: $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$

Следовательно, функция нечетная ни нечетная – функция общего положения.

Следует напомнить, что график четный функции $[y(-x)=y(x)]$ симметричен оси ОУ, график нечетной функции $[y(-x)=-y(x)]$ симметричен относительно начала координат.

4.Находим интервалы возрастания, убывания и экстремум функции, для этого:

а) найдем производную функции

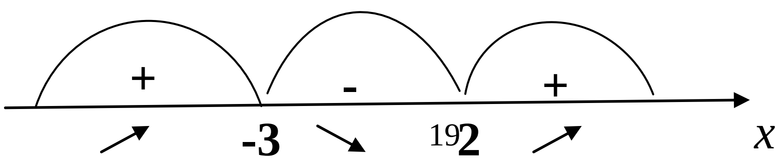
$$y'=\left[\frac{1}{5}\left(2x^3+3x^2-36x-21\right)\right]'=\frac{1}{5}\left[6x^2+6x-36\right]=\frac{6}{5}\left(x^2+x-6\right)$$

б) Приравняем производную к нулю, решим уравнение $y'=0$ и найдем критические точки I рода

$$\frac{6}{5}\left(x^2+x-6\right)=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$$

$$\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1-5}{2}=-3 \\ x_2=\dfrac{-1+5}{2}=2 \end{array}; \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right\} \text{-критические точки.}$$

в) Критическими точками разобьем область определения на интервалы и определим знак производной в каждом из интервалов.



Если, $x \in (-\infty;-3)$, например, *x=-4*, то $y'(-4) = \frac{6}{5}(16-4-6) = \frac{36}{5} \rangle 0$.

Если, $x \in (-3;2)$, например, *x=0*, то $y'(0) = -\frac{36}{5} \langle 0$.

Если, $x \in (+\infty;2)$, например *x=3*, то $y'(3) = \frac{6}{5}(9+3-6) = \frac{36}{5} \rangle 0$.

Рассматривая знаки производной по интервалам, получаем, что при $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$, функция возрастает, отмечаем это стрелкой ↗,при $x \in (-3;2)$ функция убывает ↘.

г) Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с (+) на (-), то в этой точке функция имеет максимум (max), если знак меняется с (-) на (+), то в точке функция имеет минимум (min).

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{5}[2\cdot(-27) + 3\cdot 9 + 108 - 21] = \frac{1}{5}\cdot 60 = 12$$

$$y_{\min} = y(2) = \frac{1}{5}[2\cdot 8 + 3\cdot 4 - 72 - 21] = \frac{1}{5}(-65) = -13$$

В нашем случае *x=-3* – абсцисса точки max, *x=2* – абсцисса точки min.

Вычисляем значение функции в точках экстремума:

Для построения графика укажем *A(-3;12)*- точка *max, B(2;-13)*- точка *min.*

5. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

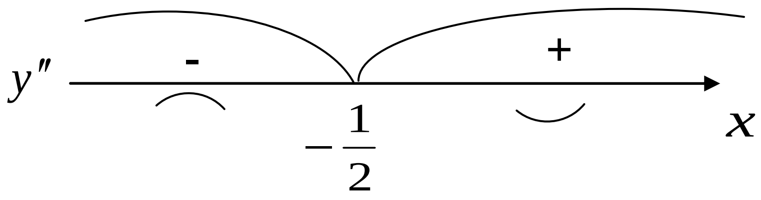
$$y'' = (y')' = \left[\frac{6}{5}(x^2 + x - 6)\right]' = \frac{6}{5}(2x+1)$$

а) найдем производную второго порядка.

б) приравняем вторую производную к нулю, решим уравнение $y^{u} = 0$ и найдем критические точки II рода.

$$\frac{6}{5}(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

в) область определения разобьем найденной точкой на интервалы и определим знак второй производной в каждом интервале



Расставляя знаки второй производной по интервалам, получаем, что в интервале

$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, график функции выпуклый,

в интервале $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ график функции вогнутый.

г) если при переходе через критическую точку II рода, меняет знак, то в этой точке имеем перегиб, в нашем случае $x=-\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба.

Вычислим ординату точки перегиба.

$$y_{перегиб}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+36\cdot\left(\div\frac{1}{2}\right)-21\right)=\frac{1}{2}$$

C $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ - точка перегиба.

6. Выясним наличие наклонных асимптот у графика данной функции.

Уравнение асимптоты ищем в виде $y=kx+b$,

где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

Имеем $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(2x^3+3x^2-36x-21\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5}\left[2x^2+3x-36-\frac{21}{x}\right]=\infty$$

Следовательно, наклонных асимптот график не имеет.

7. Для построения графика функции составим сводную таблицу.

Разобъем числовую ось *OX* характерными точками на интервалы (первая строка таблицы). Где характерными точками являются: точки экстремума; точки перегиба; точки, в которых функция не существует.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};2\right)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	↗	max 12	↘	пергиб 1/2	↘	min -13	↗

Строим график функции, отмечая точки *A, B, C, max, min* и точку перегиба. Можно найти координаты дополнительных точек, например точку пересечения с осью OY, $x=0 \Rightarrow y=-\frac{21}{5}=-4{,}2 \Rightarrow D(0;-4{,}2)$. График на рисунке 1.

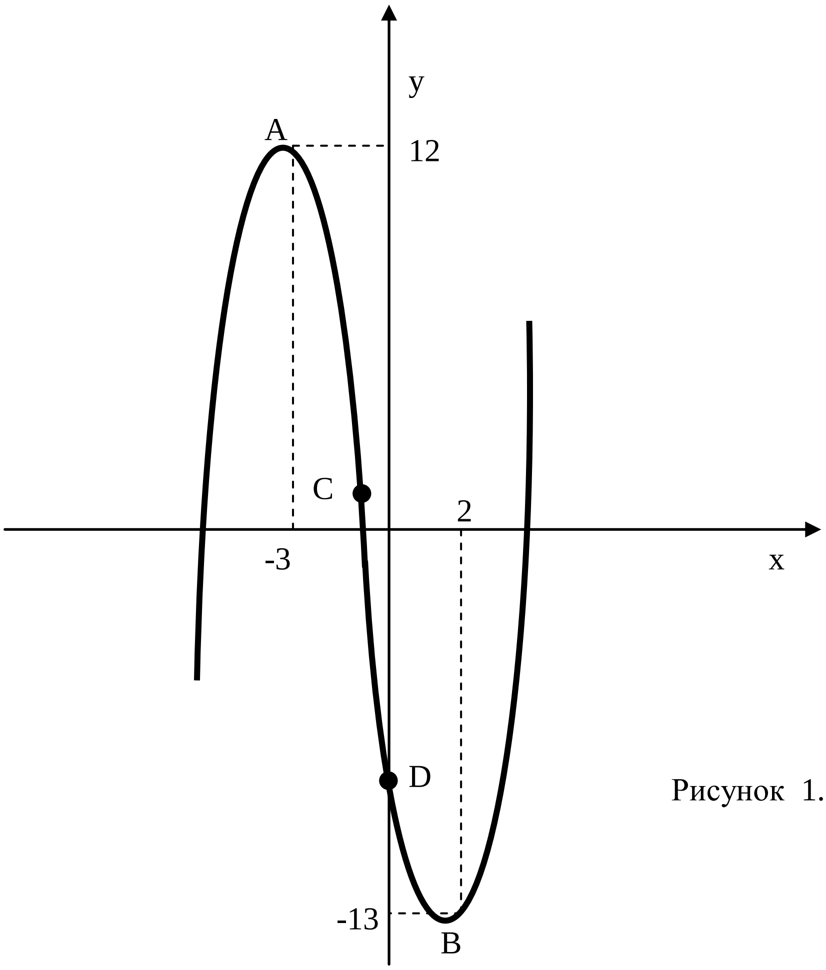


Рисунок 1.

8. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции на заданном отрезке [-4;1] по следующему правилу: вычислим значение функции в критических точках I рода, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка, затем выбираем наибольшее и наименьшее значение функции. Т. к. непрерывная на отрезке

функция имеет наибольшее и наименьшее значение либо в точках экстремума (внутри отрезка), либо на концах отрезка.

Критические точки $x_1 = -3 \in [-4;1]$,

$$x_2 = 2 \notin [-4;1]$$

Вычисляем значение функции при *x=-4; x=-3; x=1*

$$y(-4) = \frac{1}{5}[2\cdot(-64)+48+144-21] = \frac{43}{5} = 8{,}6$$

$$y(-3) = 12; y(1) = \frac{1}{5}(2+3-36-21) = -\frac{52}{5} = -10{,}4$$

Следовательно, наименьшее значение функции на данном отрезке:

наименьшее значение функции $\min\limits_{[-4;1]} f(x) = -10{,}4;$

наибольшее значение функции $\max\limits_{[-4;1]} f(x) = 12$

61-80. Дана функция y = f(x) и значения аргумента x_1 и x_2. Требуется найти приближенное значение функции при $x=x_2$ исходя из ее точного значения при $x=x_1$, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

61. $y = \sqrt{2x^2 + x^3 + 1}$

$x_1=1; x_2=0{,}96$

62. $y = \sqrt{5x^2 - 4x^3 - 8}$

$x_1=3; x_2=2{,}93$

63. $y = \sqrt[4]{3x^2 + 4}$

$x_1=2; x_2=1{,}95$

64. $y = \sqrt{x^3 + 2x^2}$

$x_1=2; x_2=2{,}04$

71. $y = \sqrt{3x^2 + x - 5}$

$x_1=3; x_2=2{,}97$

72. $y = \sqrt[3]{2x - 3}$

$x_1=4; x_2=4{,}02$

73. $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$

$x_1=8; x_2=7{,}98$

74. $y = \sqrt[3]{2x^3 - 6x - 4}$

$x_1=5; x_2=5{,}03$

65. $y=\sqrt[3]{5x^3+3x^5}$

$x_1=1; x_2=1{,}08$

66. $y=\sqrt{x^3+3x^2+5}$

$x_1=2; x_2=2{,}05$

67. $y=\sqrt[3]{x^5-5}$

$x_1=2; x_2=1{,}97$

68. $y=\sqrt{x^3-4x^2+13}$

$x_1=3; x_2=3{,}04$

69. $y=\sqrt[5]{x^3+5}$

$x_1=3; x_2=3{,}08$

70. $y=\sqrt[4]{3x^5-2x+15}$

$x_1=1; x_2=0{,}98$

75. $y=\sqrt{6x^2+4}$

$x_1=4; x_2=3{,}96$

76. $y=\sqrt[3]{4x^3+3x^2-10}$

$x_1=3; x_2=2{,}98$

77. $y=\sqrt{3x^2-8}$

$x_1=6; x_2=5{,}97$

78. $y=\sqrt[3]{x^3-x+5}$

$x_1=5; x_2=4{,}97$

79. $y=\sqrt[4]{x^2+12}$

$x_1=2; x_2=2{,}05$

80. $y=\sqrt[4]{8x^2+9}$

$x_1=3; x_2=3{,}06$

Решение типового примера.

Задача 4. Вычислить приближенное значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2+60}$ **при** x_2**=1,85, исходя из её точного значения при** x_1**=2**

Решение.

Известно, что если приращение аргумента Δx мало по абсолютной величине, то приращение функции Δy приближенно равно дифференциалу $dy,$ т.е. $\Delta y \approx dy,$ учитывая, что $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x),$ а $dy=f'(x)\Delta x$ и обозначая $x=x_1$ $x+\Delta x=x_2$ получим приближенную формулу:

$$f(x_2) \approx f(x_2) + f'(x_2) \cdot \Delta x, \qquad (3.1), \qquad \text{где}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

В нашем случае: $f(x_1) f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 60} = 4$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 + 60}\right)' = \left[\left(x^2 + 60\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(x^2 + 60\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(x^2 + 60\right)' = \frac{1}{3} \frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2 + 60\right)^2}};$$

$$f'(x_1) f'(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{\sqrt[3]{4 + 60^2}} = \frac{1}{12}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.85 - 2 = -0.15$$

Подставляя найденные значения в формулу (3.2) получим:

$$f(1.85) \approx \sqrt[3]{1.85^2 + 60} \approx 4 + \frac{1}{12} \cdot (-0.15) = 4 - \frac{0.15}{12} = 4 - 0.0125 = 3.9875$$

т.е. $\sqrt[3]{(1.85)^2 + 60} \approx 3.9875$

<u>Тема:4</u> Неопределенный интеграл (задачи 81-100). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 5.1, 5.2, 5.3 пятого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 5.

81-100. Найти неопределенные интегралы и результаты проверить дифференцированием.

81. а) $\int \left(3x^2 + \frac{8}{x} + 11 \cdot \sqrt[9]{x^2}\right) dx$ в) $\int x^3 \ln x dx$

б) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3 + 1}$ г) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 7x - 6}{x^2 + 4x + 3} dx$

82. а) $\int \left(4x^3 - 5 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1\right) dx$ в) $\int x \cos 5x dx$

б) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{4x^2 - 3}}$ г) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 30}{x^2 - 6x + 10} dx$

83. а) $\int\left(2x^3-5\cdot\sqrt[3]{x}-1\right)dx$

б) $\int\sqrt{5x^4+3}\cdot x^3dx$

в) $\int(x-1)e^{2x}dx$

г) $\int\frac{2x^3-9x^2+15x-2}{x^2-4x+5}dx$

84. а) $\int\left(5x^2+\frac{8}{x^3}+5\right)dx$

б) $\int\frac{xdx}{2x^2+5}$

в) $\int(2x-1)\sin 7xdx$

г) $\int\frac{3x^3+2x^2+x-12}{x^2+2x+3}dx$

85. а) $\int\left(5x^4+\frac{3}{x^4}+2\right)dx$

б) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5x^4+3}}$

в) $\int(5x+1)\ln xdx$

г) $\int\frac{x^3-7x^2+15x-18}{x^2-2x+3}dx$

86. а) $\int\left(2x^5-3\cdot\sqrt{x}-4\right)dx$

б) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

в) $\int 3x^4\ln xdx$

г) $\int\frac{5x^3-40x^2+99x-3}{x^2-8x+20}dx$

87. а) $\int\left(x^3+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)dx$

б) $\int\frac{(\ln x+3)dx}{x}$

в) $\int(2x-7)e^{-8x}dx$

г) $\int\frac{x^3-4x^2-7x+1}{x^2-6x}dx$

88. а) $\int\left(x^4-5\cdot\sqrt[3]{x^2}+3\right)dx$

б) $\int\frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$

в) $\int\frac{\ln x}{x^4}dx$

г) $\int\frac{3x^3-7x^2+4x-3}{x^2-2x}dx$

89. а) $\int\left(2x^3-7\cdot\sqrt[5]{x^2}-4\right)dx$

б) $\int\frac{9^{tgx}dx}{\sin^2 x}$

в) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

г) $\int\frac{x^3-11x^2+38x-26}{x^2-10x+26}dx$

90. а) $\int\left(5x^3-\frac{5}{x^6}+11\right)dx$

в) $\int 2x\cdot 3^{2x}dx$

б) $\int e^{\sin 2x}\cos 2x dx$

91. а) $\int \left(2x^4 - 3\cdot\sqrt{x} + 5\right)dx$

б) $\int \frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$

92. а) $\int \left(3x^5 - 7\cdot\sqrt[4]{x} + 4\right)dx$

б) $\int \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$

93. а) $\int \left(x^6 - 4\cdot\sqrt[3]{x} + 2\right)dx$

б) $\int \frac{arctg^5 x dx}{1+x^2}$

94. а) $\int \left(x^7 - 5\cdot\sqrt[4]{x} - 3\right)dx$

б) $\int \frac{e^{arcctg\,(x)}dx}{1+x^2}$

95. а) $\int \left(3x^6 - \frac{5}{x^6} + 1\right)dx$

б) $\int x^3\cdot\sqrt[4]{1+x^4}\,dx$

96. а) $\int \left(3x^6 + 8\cdot\sqrt[5]{x^3} - 4\right)dx$

б) $\int \sin^4 x\cdot\cos x dx$

97. а) $\int \left(3x^4 - 11\cdot\sqrt[6]{x^5} - 4\right)dx$

б) $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$

98. а) $\int \left(5x^6 - \frac{5}{x^7} - 5\right)dx$

г) $\int \frac{3x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 + x}dx$

в) $\int x\sin 3x dx$

г) $\int \frac{x^3 - 11x^2 + 14x + 27}{x^2 - 12x + 27}dx$

в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

г) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 2x - 3}dx$

в) $\int x\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$

г) $\int \frac{2x^3 - 8x^2 - 8x}{x^2 - 4x - 5}dx$

в) $\int 4x^5 \ln x dx$

г) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 7x - 5}{x^2 + 4x - 5}dx$

в) $\int x\cos 2x dx$

г) $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x - 5}dx$

в) $\int xe^{-3x}dx$

г) $\int \frac{x^3 + x^2 - 19x - 39}{x^2 + 6x + 8}dx$

в) $\int x\cdot\sin\frac{x}{5}dx$

г) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 5x - 51}{x^2 + 8x + 17}dx$

в) $\int \frac{\ln x}{x^7}dx$

б) $\int \frac{2^{tgx}dx}{\cos^2 x}$

г) $\int \frac{x^3+9x^2+22x-29}{x^2+10x+29}dx$

99. а) $\int \left(7x^6-5x\cdot\sqrt{x}+2\right)dx$

в) $\int x\cdot\cos 4xdx$

б) $\int \frac{x^3dx}{x^4+7}$

г) $\int \frac{2x^3+7x^2+23x}{x^2+4x+13}dx$

100. а) $\int \left(3x^3+7x\cdot\sqrt[3]{x}+2\right)dx$

в) $\int \frac{\ln x}{x^5}dx$

б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+3e^x}}$

г) $\int \frac{3x^3+7x^2-23x}{x^2+2x-8}dx$

При решении задач 81-100 используйте таблицу 2 - основных неопределенных интегралов.

Решение типового примера.

Задача 5. Найти неопределённые интегралы и результаты проверить дифференцированием:

а) $\int (9x^8+3\sqrt{x}-5x+3)dx$

б) $\int x^2(3+5x^3)^4 dx$

в) $\int (x+3)\sin 2xdx$

г) $\int \frac{x^3+9x^2+2x-120}{x^2+12x+40}dx$

Решение:

а) $\int \left(9x^8+3\sqrt{x}-5x+3\right)dx$

$$\int \left(9x^8+3\sqrt{x}-5x+3\right)dx=$$

$$\int 9x^8dx+\int 3\sqrt{x}dx-\int 5xdx+\int 3dx=9\int x^8dx+3\int x^{\frac{1}{2}}dx-5\int xdx+3\int dx=9\frac{x^9}{9}+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-5\frac{x^2}{2}+3x+C=$$

$$=x^9+2x\sqrt{x}-2{,}5x^2+3x+C$$

Таблица 2

1. $\int dx = x + c$;

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$;

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$;

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c$;

5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$;

6. $\int e^x dx = e^x + c$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

9. $\int \cos x dx = \sin x + c$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;

12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$;

13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$;

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c$;

15. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + c$;

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + t}} = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^2 + t}\right) + c$;

17. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$;

18. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$;

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$;

20. $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$;

21. $\int \sin ax dx = -\dfrac{1}{a} \cos ax + c$;

22. $\int \cos ax dx = \dfrac{1}{a} \sin ax + c$;

23. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

При решении использовали свойства неопределённого интеграла: 1)неопределённый интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме интегралов от каждой из функций, 2) постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла. Интегралы от каждого из слагаемых найдены с помощью формул 1 и 2 (см. таблицу интегралов).

<u>Проверка:</u>

Найдём производную от результата интегрирования, получим подынтегральную функцию.

$$(x^9 + 2x\sqrt{x} - 2{,}5x^2 + 3x + c)' = 9x^8 + 2(x^{\frac{3}{2}})' - 2{,}5\cdot 2x + 3 = 9x^8 + 2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5x + 3 =$$

$$= 9x^8 + 3\sqrt{x} - 5x + 3.$$

б) $\int x^2\left(3+5x^3\right)^4 dx$

Интеграл найден подстановкой, затем используем формулу 2 таблицы.

Решение запишем следующим образом:

$$\int x^2(3+5x^3)^4\,dx = \begin{vmatrix} u = 3+5x^3 \\ du = 15x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{du}{15} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\int u^4du = \frac{1}{15}\cdot\frac{u^5}{5} + c = \frac{u^5}{75} + c = \frac{(3+5x^3)^5}{75} + c$$

Проверка:

$$\left[\frac{(3+5x^3)^5}{75}\right]' = \frac{1}{75}\cdot 5(3+5x^3)^4\cdot(3+5x^3)'$$

$$= \frac{1}{15}(3+5x^3)^4\cdot 15x^2 = x^2(3+5x^3)^4$$

в) $\int (x+3)\sin 2x dx$

При вычислении этого интеграла применяется формула интегрирования по частям, которая имеет вид: $\int u dv = uv - \int v du$

Этой формулой пользуются в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы является более простым, чем исходный.

При этом следует учесть:

1) если подынтегральное выражение есть произведение показательной или тригонометрической на степенную функцию или многочлен, то за множитель **u** принимается многочлен;

2) если подынтегральное выражение есть произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на степенную функцию или многочлен, то за множитель **u** принимают логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

В нашем случае следуем первому указанию, решение оформим следующим образом:

$$\int (x+3)\sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = x+3 & du = dx \\ dv = \sin 2x dx & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+3)\cdot(-\frac{1}{2}\cos 2x) - \int (-\frac{1}{2}\cos 2x) dx =$$

$$-\frac{1}{2}(x+3)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(x+3)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Проверка.

$$\left[-\frac{1}{2}(x+3)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\right]' = -\frac{1}{2}\left[(x+3)'\cos 2x + (x+3)\cdot(\cos 2x)'\right] + \frac{1}{4}(\sin 2x)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos 2x + (x+3)\cdot(-\sin 2x)\cdot(2x)'\right] + \frac{1}{4}\cos 2x\cdot(2x)' =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\cos 2x - 2(x+3)\sin 2x\right] + \frac{1}{4}\cos 2x\cdot 2 == -\frac{1}{2}\cos 2x + (x+3)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = (x+3)\sin 2x$$

г) $\int \frac{x^3+9x^2+2x-120}{x^2+12x+40}dx$

Подынтегральное выражение есть неправильная дробь, поэтому прежде чем найти интеграл нужно эту дробь преобразовать, выделив целую часть дроби, т. е. представить дробь в виде суммы её целой части и правильной дроби. Для этого числитель дроби делим на знаменатель по правилу деления многочленов.

$$\begin{array}{l|l} x^3+9x^2+2x-120 & x^2+12x+40 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+12x^2+40x} & x-3 \\ -3x^2-38x-120 & \\ \underline{-3x^2-36x-120} & \\ -2x & \end{array}$$

Целая часть – частное (x – 3) , остаток (- 2x), следовательно:

$$\frac{x^3+9x^2+2x-120}{x^2+12x+40} = (x-3) - \frac{2x}{x^2+12x+40}$$

Найдем отдельно интегралы от каждого слагаемого:

$$1. \int \frac{2x}{x^2+12x+40}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{преобразуем квадратный трехчлен,} \\ \textit{выделив полный квадрат} \\ x^2+12x+40 = (x^2+12x+36)+4 = (x+6)^2+4 \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{2x}{(x+6)^2+4}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{обозначим:} \\ t = x+6 \quad dx = dt \\ x = t-6 \end{array} \right| = \int \frac{2(t-6)}{t^2+4}dt = \int \frac{2t}{t^2+4}dt - 12\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$\ln(t^2+4) - \frac{12}{2}arctg\frac{t}{2} + c = \ln\left[(x+6)^2+4\right] - 6arctg\frac{x+6}{2} + c$$

$$2. \int (x-3)dx = \int xdx - 3\int dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$$

При нахождении интеграла 1 использовали правило: если в числителе производная знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + c$$

При нахождении интеграла 2 использовали формулу (15) из таблицы интегралов

Ответ: $\int \frac{x^3+9x^2+2x-120}{x^2+12x+40}dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \ln\left[(x+6)^2+4\right] + 6arctg\,\frac{x+6}{2} + c$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2} - 3x - \ln\left(x^2+12x+40\right) + 3arctg\,\frac{x+6}{2} + c\right)' = x - 3 - \frac{1\cdot\left(x^2+12x+40\right)'}{x^2+12x+40} + \frac{6}{1+\left(\frac{x+6}{2}\right)}\cdot\left(\frac{x+6}{2}\right)'$$

$$= x - 3 - \frac{2x+12}{x^2+12x+40} + \frac{6}{1+\frac{(x+6)^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} = x - 3 - \frac{2x+12}{x^2+12x+40} + \frac{6}{\frac{4+(x+6)^2}{4}}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$x - 3 - \frac{2x+12}{x^2=12+40} + \frac{24}{x^2+12x+40}\cdot\frac{1}{2} = x - 3 - \frac{2x+12}{x^2+12x+40} + \frac{12}{x^2+12x+40} =$$

$$x - 3 - \frac{2x}{x^2+12x+40} = \frac{x^3+12x^2+40x-3x^2-36x-120-2x}{x^2+12x+40} = \frac{x^3+9x^2+2x-120}{x^2+12x+40}$$

Тема:5 Определенный интеграл (задачи 101-120). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 6.1, 6.2 шестого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 6.

101-120. Вычислить определенные интегралы.

101. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+4}dx$

111. $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+9}$

102. $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+9}dx$

112. $\int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+4}$

103. $\int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+16}dx$

113. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+16}$

104. $\int_1^{20} \frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{x+7}+4}dx$

114. $\int_1^{20} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+7}+4}$

105. $\int_8^{15} \frac{\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt[3]{x-7}+1}dx$

115. $\int_8^{15} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-7}+9}$

106. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}$

116. $\int_4^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}+5}$

107. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$

117. $\int_4^{11} \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt{x+5}}dx$

108. $\int_1^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$

118. $\int_0^2 \frac{\sqrt{4x+1}}{2+\sqrt{4x+1}}dx$

109. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$

119. $\int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{6+\sqrt{2x-1}}dx$

110. $\int_1^{13} \frac{dx}{\sqrt{4x-3}\left(\sqrt{4x-3}+5\right)}$

120. $\int_0^8 \frac{\sqrt[3]{x-8}}{\sqrt[3]{x-8}-2}dx$

Решение типового примера.

Задача 6. Найти определенный интеграл:

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx$$

Решение.

Для вычисления определенного интеграла, если промежуток интегрирования конечен и подынтегральная функция на данном прмежутке непрерывна, можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Для вычисления данного интеграла воспользуемся методом подстановки в определенном интеграле. Введем новую переменную следующей подстановкой: $\sqrt{x+1}=t$, тогда $x+1=t^2$ или $dx=2tdt$.

Определим переделы интегрирования для переменной *t.* При *x=0,* получаем $t_н=1$, при *x=3* получаем $t_в=2$.

Выразив подынтегральное выражение, через *t* и *dt* и перейдя к новым пределам, получим

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx=\int_1^2 \frac{t}{t+2}2tdt=2\int_1^2 \frac{t^2}{t+2}dt.$$

В подынтегральной дроби выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,t^2 & t+2 \\ \underline{t^2+2t} & \overline{t-2} \\ -\,-2t & \\ \underline{-2t-4} & \\ 4 & \end{array}$$

Получим $\frac{t^2}{t+2}=t-2+\frac{4}{t+2}$.

Тогда заданный интеграл примет вид

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx=2\int_1^3 tdt-4\int_1^3 dt+8\int_1^3 \frac{dt}{t+2}=t^2\Big|_1^3-4t\Big|_1^3+8\ln|t+2|\Big|_1^3$$

$$=(9-12+8\ln 5)-(1-4+8\ln 3)=8\ln\frac{5}{3}$$

<u>Тема:6</u>. Применение определенного интеграла. Несобственные интеграл (задачи 121-140, 141 - 160). Перед выполнением задач необходимо изучить вопрос 6.3 шестого раздела дисциплины и разобрать решение задач 7, 8.

121-140. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

121	$y=\frac{1}{3}(x-3)^2,\ y=x+3$	131	$y=\frac{1}{3}(x-1)^2,\ y=x+5$
122	$y=\frac{1}{3}(x-4)^2,\ y=x+2$	132	$y=\frac{1}{3}(x+5)^2,\ y=x+11$
123	$y=\frac{1}{3}(x-5)^2,\ y=x+1$	133	$y=\frac{1}{3}(x+4)^2,\ y=x+10$
124	$y=\frac{1}{3}(x+1)^2,\ y=x+7$	134	$y=x^2-3,\ y=4x-6.$
125	$y=\frac{1}{3}(x+2)^2,\ y=x+8$	135	$y=3x^2+1,\ y=3x+7.$
126	$y=\frac{1}{3}(x+3)^2,\ y=x+9$	136	$y=x^2+1,\ y=x+3.$
127	$y=x^2-3,\ y=-x-1.$	137	$y=x^2+1,\ y=4x-2.$
128	$y=\frac{1}{3}(x-1)^2,\ y=x+5$	138	$y=x^2+2,\quad y=-x+4$
129	$y=x^2+4,\ y=4x+1.$	139	$y=x^2-2,\ y=3x+2.$
130	$y=3x^2+2,\ y=3x+8.$	140	$y=\frac{1}{3}(x-4)^2,\ y=x+2$

Решение типового примера.

Задача 7. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$$y=\frac{1}{3}x^2; \qquad y=-x+6$$

Решение.

Фигура ограничена двумя линиями, найдём точки пересечения этих линий и сделаем чертёж, который указан на рисунке 8.

Решим систему:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ y=-x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2=-x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ x^2+3x-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2 \\ x_1=\frac{-3-9}{2}=-6 \\ x_2=\frac{-3+9}{2}=3 \end{cases}$$

Точки пересечения линий:

A(-6; 12); B(3;3)

Для построения фигуры определим тип линий.

$y=\frac{1}{3}x^2$ - парабола, ветви вверх, вершина O(0;0),

$y=-x+6$ - прямая линия.

Построение (рис.2)

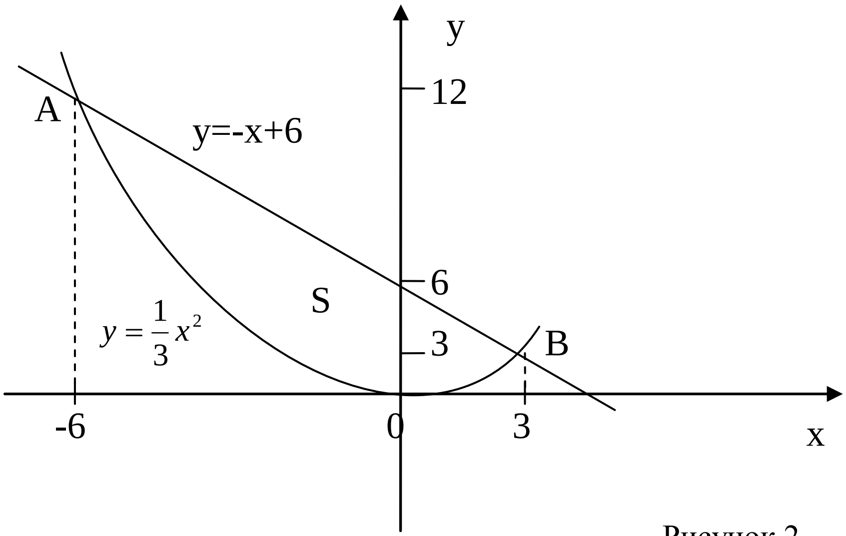


Рисунок 2

Вычисление площади осуществляем по формуле:

$$S=\int_a^b \left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx,$$

где $y=f_1(x)$ – кривая ограничивающая фигуру снизу,

$y=f_2(x)$ – кривая ограничивающая фигуру сверху.

В нашем случае $f_1(x)=\frac{1}{3}x^2;\quad f_2(x)=-x+6$

$$S=\int_{-6}^{3}\left[(-x+6)-\frac{1}{3}x^2\right]dx=\left[-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-6}^{3}=$$

$$=\left(-\frac{9}{2}+18-\frac{3^3}{3^2}\right)-\left(-\frac{36}{2}-36-\frac{(-6)^3}{9}\right)=$$

$$(-4{,}5+18-3)-(-18-36+24)==11{,}5+30=41{,}5$$

$$S=41{,}5\ (кв.ед.)$$

141-160. Вычислить несобственные интегралы.

141	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+2)^3}$	151	$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}$
142	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+7)^2}$	152	$\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+4}}$
143	$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-3x+1}dx`$	153	$\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$
144	$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x-8}}$	154	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{4x+2}$
145	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{3x+1}$	155	$\int\limits_{-\infty}^{5}\frac{dx}{(x-4)^2}$
146	$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2xdx}{x^2-1}$	156	$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-5x+1}dx`$
147	$\int\limits_0^{\infty}e^{x/2}dx$	157	$\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{2x+4}$
148	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(3x-1)^4}$	158	$\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{2xdx}{x^2-1}$
149	$\int\limits_1^{\infty}e^{-4x+1}dx$	159	$\int\limits_0^{\infty}x\cdot e^{-x^2}dx$
150	$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$	160	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x+3)^4}$

Решение типового примера.

Задача 8. Вычислить несобственные интегралы.

а) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$ б) $\int\limits_0^{\infty}e^{-5x}dx$

Решение.

Несобственные интегралы разделяют на два типа. Данный интеграл является интегралом первого типа с бесконечным пределом интегрирования.

За значение интеграла принимается предел, к которому стремиться соответствующий определенный интеграл при стремлении пределов интегрирования к бесконечности:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx;\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$$

Если указанные пределы конечны, то говорят, что несобственные интеграл сходится. Если же предел бесконечен (не существует), то говорят, что несобственный интеграл расходится. В заданном интеграле $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$ применяем подстановку в определенном интеграле.

Пусть $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$, если *x=3*, то *t=ln3*; $x\to\infty$, то $t\to\infty$, получим:

$$\int_{\ln 3}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 3}^{b}\frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3},$$ т.к. при $b\to\infty$ $\Rightarrow \frac{1}{b}\to 0$.

Интеграл сходится.

б) $\int_0^{\infty} e^{-5x}dx$

$$\int_0^{\infty} e^{-5x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty} e^{-5x}\Big|_0^b = -\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-5b}-e^0\right) =$$

$$-\frac{1}{5}\left(e^{-\infty}-1\right) = -\frac{1}{5}(0-1) = \frac{1}{5} - \textit{несобственный интеграл сходится}$$

Замечание: $e^{-\infty}\to 0$, т.к. $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty}\to 0$.

<u>Тема:7</u>. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. (задачи 161-180). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 4.1, 4.2 четвертого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 9.

160– 181. Для функции двух переменных *z =f(x,y)* найти точки экстремума.

161. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	171. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
162. $z = xy - y^2 - x^2 + 1$	172. $z = 4 - 5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y$
163. $z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	173. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y$
164. $z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$	174. $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 5$
165. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	175. $z = x^3 - 6xy + 2y^3 + 9$
166. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y$	176. $z = x^2 + xy + 4y^2 + x^3$
167. $z = x^3 - 3xy + y^3 + 10$	177. $z = -x^3 + 9xy - y^3 + 7$
168. $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3 + 1$	178. $z = -x^3 - y^2 + 81x + 4y - 5$
169. $z = x^3 - 2xy + 8y^3 + 2$	179. $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 6$
170. $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4$	180. $z = x^2 - xy - y^2 + 6x + 2$

Решение типового примера.

Задача 9. Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$**, требуется исследовать данную функцию на экстремум;**

Решение.

1) Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию на экстремум необходимо выполнить следующие действия:

а) Найдем частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, приравнять к нулю и решить систему уравнений, решением которой являются стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Следовательно, заданная функция имеет только одну стационарную точку *P(4,-2)*.

б) Найдем частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\,.$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных *x* и *y*, следовательно, постоянны в любой точке. Поэтому для точки *P(4,-2)* имеем *A=-2;B=-1;C=-2.*

в) составить и вычислить определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 3$$

г) Если в исследуемой стационарной точке $\Delta > 0$, то функция *z=f(x,y)* в этой точке имеет максимум при *A<0* и минимум при *A>0*; если $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме требует дополнительного исследования. Для данной функции $\Delta > 0$ и *A<0*, следовательно, в точке *P(4,-2)* имеем максимум.

д) Найдем значение функции:

$$z_{\max} = z(4;-2) = -(4^2) - 4\cdot(-2) - (-2)^2 + 6\cdot 4 - 4 = 8\,.$$

<u>Тема:8</u>. Дифференциальные уравнения (задачи 181-200). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 7.1, 7.2, 7.3 седьмого раздела дисциплины и разобрать решение задачи 10.

181-200. Даны дифференциальные уравнения.

Найти: а) общее и частное решение дифференциального уравнения первого порядка; б) общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

181. а) $y' - \frac{2y}{x} = x^2$ $\quad y(1) = 0$	б) $y'' - 3y' + 2y = x$
182. а) $xy' + y = 2x + 1$ $\quad y(1) = 2$	б) $y'' + 4y = x + 2$
183. а) $xy' - 2y = x + 1$ $\quad y(1) = 1/2$	б) $y'' + y = e^x$
184. а) $y' + y = e^{-x}$ $\quad y(0) = 2$	б) $y'' - y = x - 1$
185. а) $y' - 5x^4 y = e^{x^5}$ $\quad y(0) = 1$	б) $y'' - 2y' + y = 2x$
186. а) $y' + y \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$ $\quad y(1) = 1$	б) $y'' + 2y' + y = 4x$
187. а) $xy' - y = x\sqrt{x}$ $\quad y(1) = 4$	б) $y'' - 4y' + 4y = 5x$
188. а) $2x \cdot y' + y = 2x^3$ $\quad y(1) = 1/7$	б) $y'' + 2y' = 2e^x$
189. а) $x\ \ y' + 1 - y^2\ = 0$ $\quad y(1) = 2$	б) $y'' + 9y = x - 2$
190. а) $y' - \frac{3y}{x} = 2x^4$ $\quad y(1) = 3$	б) $y'' + y' - 6y = 5e^x$
191. а) $xy' + 2y\ln x = \cos x$ $\quad y(0) = 3$	б) $y'' - 6y = x + 1$
192. а) $xy' - 2y = x + 1$ $\quad y(1) = 1$	б) $y'' + 25y = 3e^x$
193. а) $xy^2 \cdot y' = 1 - x^2$ $\quad y(1) = 0$	б) $y'' - 7y' = 2e^x$
194. а) $y' + y = e^{2x}$ $\quad y(0) = 0$	б) $y'' - 5y' = 3e^x$
195. а) $xy' + 2y = x^4$ $\quad y(1) = 0$	б) $y'' - 5y' + 6y = 2x$
196. а) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ $\quad y(1) = 2$	б) $y'' + 4y' + 3y = 3x + 1$
197. а) $xy' + y = \sin x$ $\quad y(0) = 3$	б) $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$
198. а) $y' + y \cdot tgx = \cos^2 x$ $\quad y(0) = 1$	б) $y'' + 9y = 4x$
199. а) $y' + y \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ $\quad y(0) = 1$	б) $y'' + 16y = 4 - x$
200. а) $xy' - 5y = e^x \cdot x^6$ $\quad y(0) = 1$	б) $y'' - 4y' = 6e^x$

Решение типового примера.

Задача 10. Даны дифференциальные уравнения.

Найти:

а) общее и частное решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - yctgx = \dfrac{1}{\sin x}$**;**

б) общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

Решение

а) $y' - yctgx = \dfrac{1}{\sin x}$

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, т.е. уравнением вида:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Для решений уравнений такого типа полагают $y = u \cdot v$, где *u, v* – независимые функции от *x*, $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение в нашем случае будем иметь:

$u'v + uv' - uv \cdot ctgx = \dfrac{1}{\sin x}$ или $(u' - uctgx) \cdot v + uv' = \dfrac{1}{\sin x}$

Подберем функцию $u = u(x)$ так, чтобы выражение в скобке, обращалось в нуль. Для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} u' - uctgx = 0 \\ uv' = \dfrac{1}{\sin x} \quad (*) \end{cases}$$

Из первого уравнения системы определяем функцию $u(x)$, имеем дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$$u' - uctgx = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u \cdot ctgx \Rightarrow \frac{du}{u} = ctgx \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow$$
$$\ln u = \ln \sin x \Rightarrow u = \sin x$$

Для определения функции $v(x)$, найденное значение функции $u(x)$ подставляем во второе уравнение системы (*)

$$\sin x \cdot v' = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -ctgx + c$$

Записываем общее решение данного уравнения в виде $y = u \cdot v$ или

$y = \sin x(-ctgx + c)$; $y = \sin x\left(-\frac{\cos x}{\sin x} + c\right)$;

$y = -\cos x + c\sin x$ - общее решение.

б) $y'' - y' - 6y = 10e^{3x}$

Решение.

Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида:
$y'' + py' + q = f(x)$, где p,q – числа.

Общее решение этого уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $(y'' + py' + q = 0)$ и частного решения неоднородного уравнения т.е. $y = Y + \overline{y}$

Чтобы найти общее решение однородного уравнения Y, составляют характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, по корням этого уравнения записывают вид общего решения Y

В нашем примере: $y'' - y' - 6y = 0$ - соответствующее однородное уравнение, где $k^2 - k - 6y = 0$ – характеристическое уравнение, найдем его корни: $D = 25 \Rightarrow k_1 = -2;\ k_2 = 3$, общее решение определяем

по таблице 3- вид общего решения однородного дифференциального уравнения II порядка. Корни действительные различные, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $Y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$.

Таблица 3

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	**Общее решения**
1. $D > 0$ $k_1 \neq k_2$ -действительные различные	$Y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
2. $D = 0$ $k_1 = k_2$ - действительные равные	$Y = C_1e^{k_2x} + C_2xe^{k_2x} = e^{k_2x}(C_1 + C_2x)$
3. $D < 0$ $\left[\begin{array}{l} k_1 = \alpha + \beta \cdot i \\ k_2 = \alpha - \beta \cdot i \end{array}\right.$ -комплексные сопряженные.	$Y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Частное решение неоднородного уравнения находим по виду правой части уравнения, при этом: если $f(x)=P_n(x)e^{2x}$, где $P_n(x)$многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами, то частное решение будет иметь вид:

1. $\overline{y}=Q_n(x)e^{2x}$, где $Q_n(x)$- многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами

2. $\bar{y}=x\cdot Q_n(x)\cdot e^{2x}$, если α совпадает с одним из корней характеристического уравнения $(\alpha=k_1 или \alpha=k_2)$

3. $\overline{y}=x^2\cdot Q_n(x)e^{2x} если \alpha=k_1=k_2$

Если $f(x)=P_n(x), то \alpha=0$

В нашем примере:

$f(x)=10e^{3x}, \alpha=3=k_2$ имеем второй случай, множитель перед e^{3x} - многочлен нулевой степени, частное решение записываем в виде: $\overline{y}=xAe^{3x}$, где A неопределенный коэффициент, чтобы найти значение A решение $\overline{y}$ подставляем в данное уравнение, для этого найдем $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$

$$\overline{y}'=\left(xA\cdot e^{3x}\right)'=A\left(e^{3x}+3xe^{3x}\right)=Ae^{3x}+A\cdot 3\cdot x\cdot e^{3x}$$

$$\overline{y}''=3Ae^{3x}+9Axe^{3x}=6Ae^{3x}+9Axe^{3x}$$

Подставляем в данное уравнение значение $\overline{y},'' \overline{y}', \overline{y}$

$$6Ae^{3x}+9Axe^{3x}-Ae^{3x}-6Axe^{3x}=10e^{3x}$$

$$5Ae^{3x}=10e^{3x}\Rightarrow 5A=10\Rightarrow A=2$$

$\overline{y}=2xe^{3x}$ *– частное решение линейного неоднородного уравнения.*

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}+2x\cdot e^{3x}$ **- общее решение данного уравнения.**

СОДЕРЖАНИЕ

Жуплей Ирина Викторовна

Математический анализ: методические указания для самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль «Математика и физика»

Подписано в печать_________2024. Формат 60x90 1/6. Бумага писчая.
Печать офсетная. Уч.-изд. л __. Тираж__ экз. Заказ __